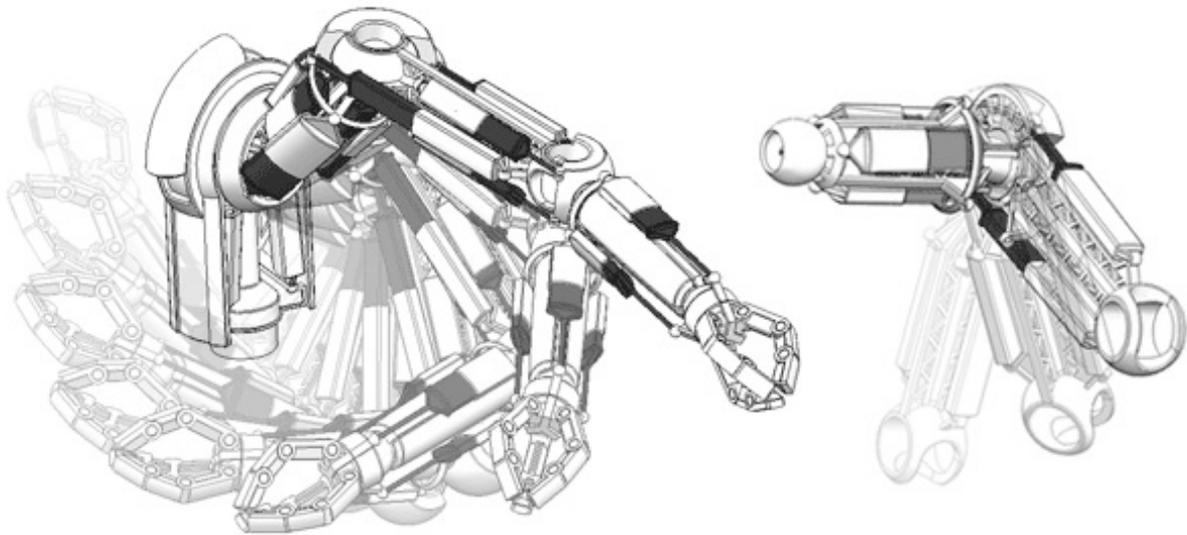


Modélisation des performances cinématiques des systèmes



Objectifs

La finalité de ce cours est de prédire les mouvements des solides des ensembles mécaniques connaissant ceux générés par les actionneurs ou de caractériser les liens entre les mouvements d'entrée et de sortie des transmetteurs : rapport de réduction des réducteurs (trains épicycloïdaux ou autres), nature et lien des mouvements pour les mécanismes de transformation de mouvement (bielle manivelle, croix de malte, pompe à pistons axiaux et radiaux, etc.).

Table des matières

1	Introduction	3
2	Paramétrage géométrique	4
2.1	Notion de solide indéformable	4
2.2	Notion de référentiel	5
2.3	Placement d'un solide dans un référentiel	6
3	Modélisation et paramétrage des mécanismes	10
3.1	Contacts entre solides	10
3.2	Liaisons normalisées	11
3.3	Graphe des liaisons	14
3.4	Schéma cinématique d'un mécanisme	15
3.5	Loi « entrée–sortie » d'un mécanisme : fermeture géométrique	19
4	Trajectoire, champ des vecteurs vitesse et accélération	21
4.1	Trajectoire d'un point d'un solide dans un référentiel	21
4.2	Vitesse d'un point d'un solide par rapport à un référentiel	21
4.3	Vecteur vitesse angulaire d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel	25
4.4	Champ de vecteurs vitesses d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel	27
4.5	Torseur cinématique	28
4.6	Cas particulier du contact ponctuel	35
5	Composition des mouvements	36
5.1	Composition des vecteurs rotations	36
5.2	Composition des vecteurs vitesses	37
5.3	Composition des torseurs cinématiques	38
5.4	Composition des accélérations	38
5.5	Application de la composition des mouvements : fermeture cinématique	40
6	Mouvements plans sur plans	43
6.1	Définition	43
6.2	Méthode utilisant l'équiprojectivité	44
6.3	Centre instantané de rotation (CIR)	45
6.4	Exemple de résolution graphique	47



1 Introduction

Le mot cinématique dérive du grec *kinêma*, *kinêmatos* qui signifie mouvement et définit la partie de la mécanique qui étudie les mouvements indépendamment des causes qui les provoquent. Dans ce cours, nous adopterons le point de vue de la mécanique classique (non relativiste) pour laquelle il existe une notion de simultanéité temporelle absolue permettant de découpler les notions d'espace et de temps.

À chaque **observateur** on associe un espace affine euclidien à trois dimensions \mathcal{E} (espace de points orienté muni d'une mesure de distance) et un espace de temps absolu paramétré sur l'axe des réels. La notion d'écoulement du temps, de manière régulière et irréversible, est donnée à un observateur par des mouvements particuliers appelés **horloges** (balancier de pendule, vibrations entretenues électriquement d'un quartz ou vibrations d'atomes de césium dans le vide pour les horloges atomiques). Par le choix d'un instant initial et d'une base de temps orientée vers le futur on peut définir une **chronologie**. On mesure le temps en représentant l'état d'une horloge par une coordonnée de temps appelée la **date**, désignée par la lettre t . La **durée** entre deux instants successifs I_1 et I_2 , de coordonnées de temps respectives t_1 et t_2 , est définie par :

$$\text{durée}(I_1, I_2) = |t_2 - t_1|$$

L'unité de la durée est la seconde (s), définie à partir de la fréquence pour laquelle la fluorescence des atomes de césium 133 est maximale et fixée à 9 192 631 770 Hz.

De façon indépendante, chaque observateur peut aussi localiser chaque événement dans l'espace physique (ou d'observation) par le choix d'un système de coordonnées associé au choix d'un **repère spatial**, c'est-à-dire un ensemble point origine et trois vecteurs de base. La notion de distance est indépendante d'un tel choix et est définie entre deux points A et B par la norme du vecteur \overrightarrow{AB} :

$$\text{distance}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

L'unité de la distance est le mètre (m), actuellement défini comme la longueur du chemin parcouru par la lumière dans le vide en $1/299\,792\,458$ seconde.

Définition 1.1 (Mouvement)

On appelle mouvement toute évolution du placement d'un corps matériel dans un espace d'observation au cours du temps.

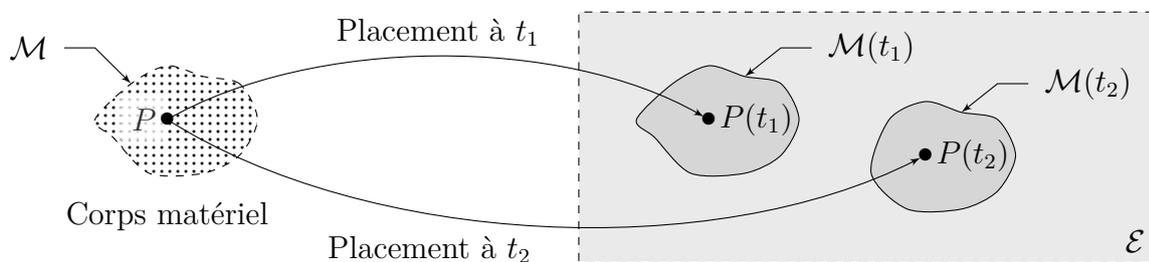


FIGURE 1 – Illustration du placement d'un corps matériel \mathcal{M} dans un espace d'observation \mathcal{E} aux instants t_1 et t_2 . À chaque instant t , $P(t)$ est le point de \mathcal{E} occupé par la particule P et $\mathcal{M}(t)$ représente le domaine occupé par le corps matériel.

Un **corps matériel**, qu'il soit fluide (liquide ou gaz) ou solide, est défini par l'ensemble des particules ou points matériels qui le constituent. En tant qu'ensemble de particules, un corps matériel a la même définition (constitution) pour tous les observateurs et existe donc indépendamment de la région de l'espace qu'il occupe à un instant donné de son évolution. On appelle **placement** l'identification (bijection) effectuée par un observateur qui, à un instant donné t , associe à chaque point matériel P d'un corps matériel \mathcal{M} un point $P(t)$ dans son espace d'observation \mathcal{E} (figure 1).

Si le placement se réfère à une description purement géométrique, pour parler de mouvement, il est nécessaire d'ajouter une notion de temps. Les grandeurs étudiées s'appellent déplacement, trajectoire, vitesse et accélération et dépendent toutes du choix d'un **référentiel** (l'association d'un repère d'espace et d'une chronologie).

2 Paramétrage géométrique

2.1 Notion de solide indéformable

Dans un cadre de modélisation, les pièces d'un mécanisme seront appelées **solides**. Lorsqu'un solide est soumis à des efforts, il peut se déformer de façon plus ou moins importante. Le plus souvent, les déformations qu'il subit peuvent être considérées comme négligeables et on fera l'hypothèse que tous les solides étudiés sont rigides ou indéformables.

Définition 2.1 (Solide indéformable)

Un solide \mathcal{S} est dit rigide ou indéformable si et seulement si au cours de son évolution les distances entre tous les points qui le constituent sont invariables ; ce qui se traduit par :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\overrightarrow{AB}(t)\| = \text{cste}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ un paramètre d'évolution (le temps).

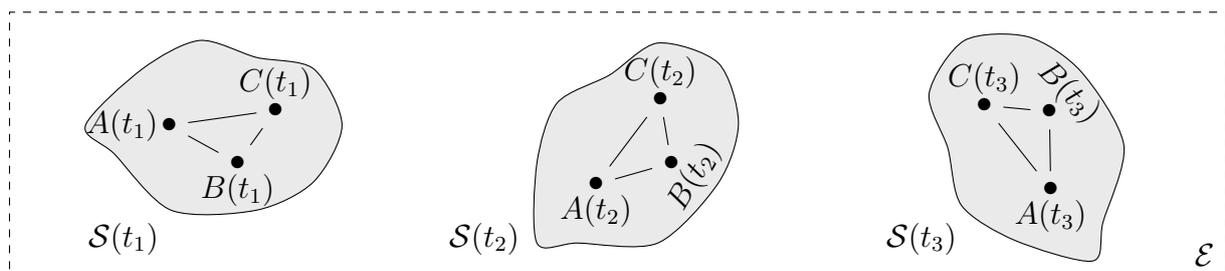


FIGURE 2 – Différents placements d'un solide indéformable pour lequel les distances entre tous ses points restent constantes.

Le caractère rigide ou indéformable d'un solide permet de le modéliser par un espace affine euclidien tridimensionnel, rigide par définition. Or un espace euclidien peut toujours être rapporté à un repère. On associera donc à chaque solide (indéformable) \mathcal{S}_i d'un mécanisme, un **repère spatial** constitué d'un point de l'espace associé au solide $A \in \mathcal{S}_i$ et d'une base $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ que l'on prendra toujours orthonormée directe. On le note $\mathcal{R}_i = (A, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

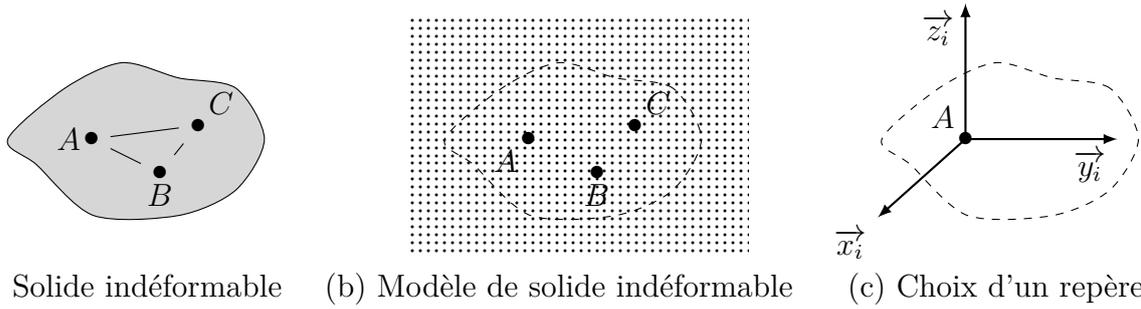


FIGURE 3 – Association d'un repère à un solide indéformable.

Il est important de noter que l'association d'un repère spatial à un solide indéformable revient simplement à choisir un système de coordonnées permettant de positionner tous ses points de façon unique et constante au cours du temps. Seulement, l'association d'un repère à un solide n'est absolument pas unique et il existe une infinité de possibilités, tant par le choix du point du solide comme origine du repère que par le choix de trois vecteurs de base. S'il est toujours possible de passer d'un repère à un autre, nous verrons dans ce qui suit qu'en pratique il est des choix qui sont plus judicieux que d'autres (figure 4).

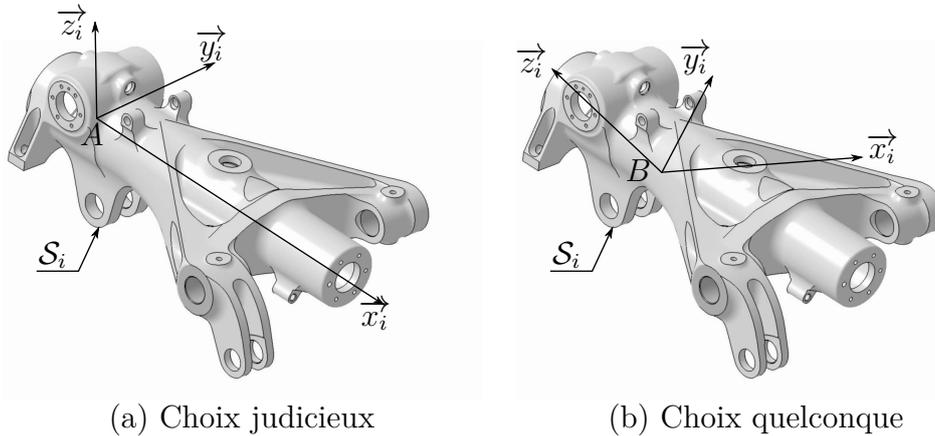


FIGURE 4 – Exemples d'association d'un repère à un solide.

2.2 Notion de référentiel

En introduisant la notion de solide indéformable, nous venons de définir les objets dont on souhaite étudier les mouvements. Or un mouvement est une notion relative qui met nécessairement en jeu deux entités indissociables :

- un objet observé, dans notre cas un solide indéformable ;
- un référentiel d'étude du mouvement, c'est-à-dire un observateur muni d'une horloge.

Dans ce qui précède, nous avons montré que l'espace associé à un solide indéformable peut être rapporté à un repère (orthonormé direct). On peut donc en déduire que le caractère indéformable des solides leur confère une nature géométrique (conservation des angles et distances) similaire à celle de l'espace physique (ou d'observation). Considérant de plus que le temps agit comme un paramètre immuable et indépendant de l'espace ou des objets

physiques, il semble possible d'étendre la notion de référentiel à toute association d'un repère (d'espace rigide) et d'une chronologie.

$$\text{Référentiel} = \left\{ \underbrace{\text{Point origine, Base spatiale}}_{\text{Repère}} ; \underbrace{\text{Instant initial, Base de temps}}_{\text{Chronologie}} \right\}$$

Parmi l'ensemble des choix de référentiels possibles, on distinguera :

- les **référentiels galiléens** ou référentiels d'inertie dont l'existence est postulée par la première loi de NEWTON. Ils sont dits absolus car associés au choix d'un repère fixe dans l'espace physique ;
- les **référentiels mobiles** associés à un **observateur** (muni d'une horloge) en mouvement dans l'espace physique. Ils correspondent au choix d'un repère mobile dans l'espace physique ce qui signifie que le repère associé à chaque solide peut servir de composante spatiale d'un référentiel d'étude du mouvement d'un autre solide.

Remarque 2.1 (Repère et référentiel)

Comme en mécanique newtonienne, le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels, on choisira toujours une seule chronologie de telle sorte qu'un changement de référentiel se limite à un changement de repère. On fera donc souvent l'abus de langage : Repère \approx Référentiel.

2.3 Placement d'un solide dans un référentiel

La phase préalable à toute étude de cinématique consiste à définir des paramètres permettant de décrire la position relative des solides. Cette étape indispensable prend le nom de **paramétrage**. Comme à chaque solide est associé un repère, placer un solide dans un référentiel revient à créer un paramétrage entre deux repères.

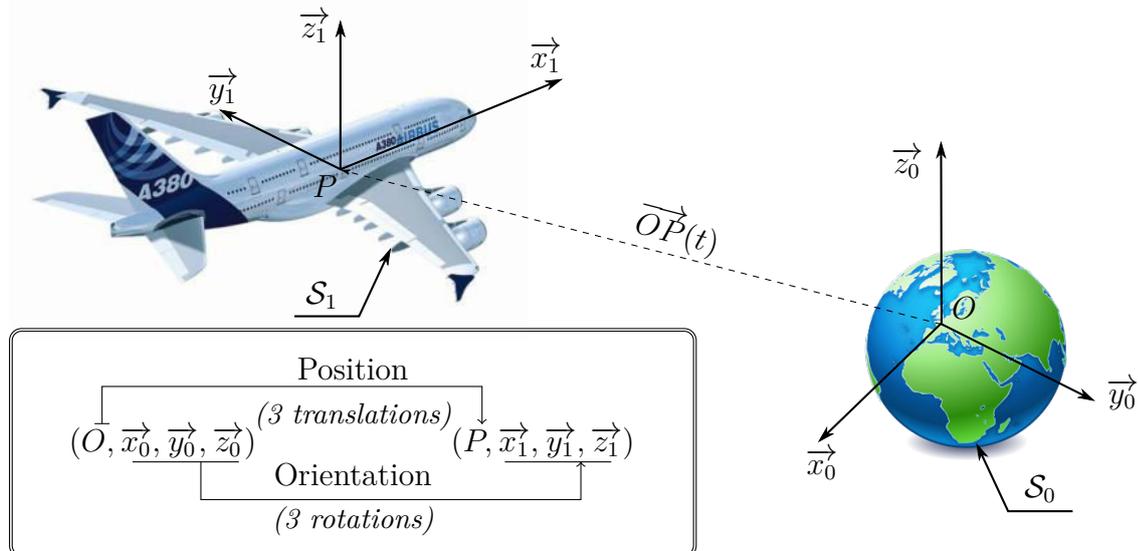


FIGURE 5 – Placement d'un repère associé à un avion (Airbus A380) dans un repère associé à un observateur terrestre et changement de repère associé.

On note $\mathcal{R}_1 = (P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé à un solide dont on cherche à décrire le mouvement par rapport à un repère de référence noté $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le placement du repère \mathcal{R}_1 par rapport au repère \mathcal{R}_0 requiert (figure 5) :

- trois paramètres de position associés à la différence de position des points origines ;
- trois paramètres d'orientation associés à la différence d'orientation des trois vecteurs de chacune des deux bases.

Dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , les trois paramètres de position sont trois longueurs et les trois paramètres d'orientation sont trois angles. Les variations temporelles des paramètres de position permettent de décrire des mouvements de translation et celles des paramètres d'orientation des mouvements de rotation. Chaque possibilité de mouvement est appelée **degré de liberté**. Il en existe six au maximum entre deux solides : trois translations et trois rotations. Leur nombre correspond au nombre de paramètres scalaires indépendants nécessaires (et suffisants) pour paramétrer le placement d'un solide dans un repère.

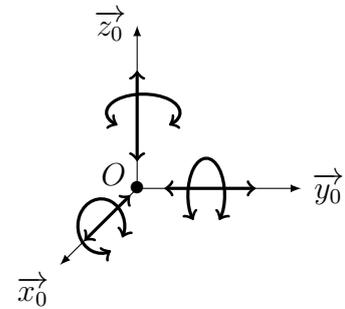


FIGURE 6 – Les six degrés de liberté.

2.3.1 Position d'un point d'un solide dans un référentiel

Définition 2.2 (Vecteur position)

La position instantanée d'un point $M(t)$ appartenant à un solide \mathcal{S} en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 , d'origine O , est définie par le **vecteur position** $\vec{OM}(t)$.

Pour exprimer les composantes de ce vecteur, il est indispensable de disposer d'un système de coordonnées pour l'espace associé à \mathcal{R}_0 . La solution la plus naturelle est d'utiliser un système de coordonnées cartésiennes associé à la base canonique de \mathbb{R}^3 , que l'on notera ici $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Mais deux autres systèmes de coordonnées sont aussi couramment employés et définis ci-après.

Coordonnées cartésiennes

Dans un système de coordonnées cartésiennes, la position instantanée d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 , d'origine O , est définie par les trois coordonnées :

$$x(t) \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z(t) \in \mathbb{R}$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , notée $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

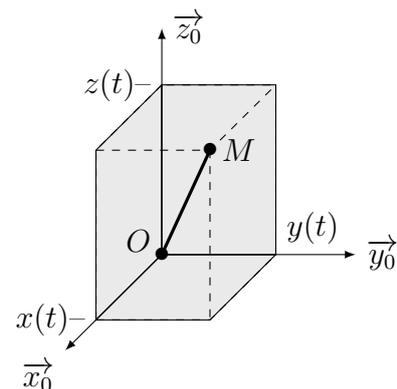


FIGURE 7 – Coordonnées cartésiennes.

Coordonnées cylindriques

Dans un système de coordonnées cylindriques (ou polaires), la position instantanée d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 , d'origine O , est définie par les trois coordonnées :

$$r(t) \in \mathbb{R}^+, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad z(t) \in \mathbb{R}$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{z}_0, \quad \vec{e}_r \equiv \vec{e}_r(\theta(t))$$

dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z}_0)$. En projetant le vecteur radial \vec{e}_r , fonction de l'angle $\theta(t)$, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on peut établir le lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t) \sin(\theta(t)) \\ z(t) = z(t) \end{cases}$$

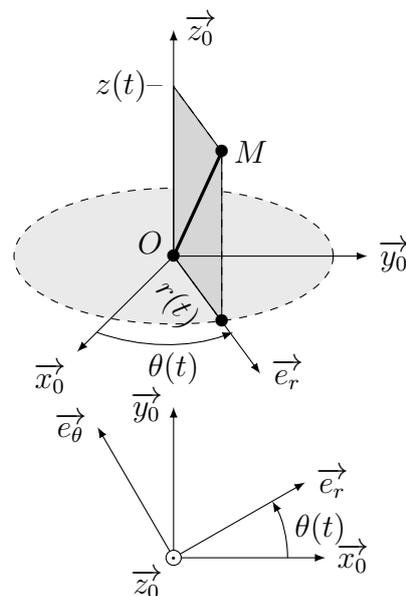


FIGURE 8 – Coordonnées cylindriques.

Coordonnées sphériques

Dans un système de coordonnées sphériques, la position instantanée d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 , d'origine O , est définie par les trois coordonnées :

$$r(t) \in \mathbb{R}^+, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \varphi(t) \in [0, \pi]$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r, \quad \vec{e}_r \equiv \vec{e}_r(\theta(t), \varphi(t))$$

dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. En projetant le vecteur radial \vec{e}_r , fonction des angles $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on peut établir le lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t) \sin(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ z(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \end{cases}$$

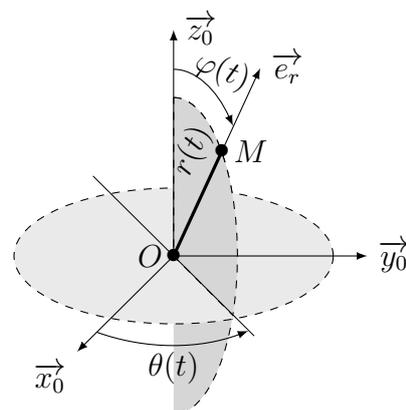


FIGURE 9 – Coordonnées sphériques.

2.3.2 Orientation d'un solide dans un référentiel

On cherche ici à paramétrer la position relative de deux bases orthonormées, l'une par rapport à l'autre. Plusieurs solutions sont possibles mais elles font toutes intervenir trois rotations successives et deux bases orthonormées intermédiaires. La plus courante, basée sur les angles d'EULER, est construite par analogie avec le mouvement de la terre autour de trois étoiles lointaines formant un repère galiléen. Une autre possibilité est d'utiliser les angles de CARDAN ou angles nautiques, utilisés en aéronautique.

Angles d'Euler Ce paramétrage fait intervenir trois angles de rotations planes successives dits de précession ψ , de nutation θ et de rotation propre φ . La première rotation permet de définir l'axe nodal ou ligne des nœuds, c'est-à-dire l'axe (O, \vec{u}) pour un repère centré au point O .

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow[\text{Précession}]{\text{Rot}(\vec{z}_0, \psi)} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow[\text{Nutation}]{\text{Rot}(\vec{u}, \theta)} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow[\text{Rotation propre}]{\text{Rot}(\vec{z}, \varphi)} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

La composition de rotations planes successives permet de dessiner des figures géométrales (ou de projection) qui sont indispensables pour effectuer les calculs de projection pour la résolution des problèmes.

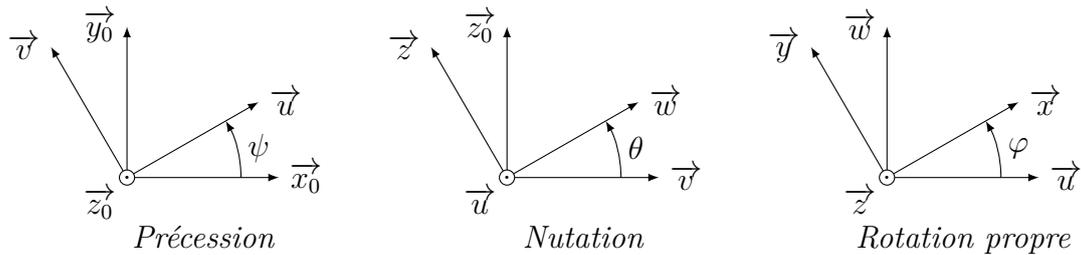


FIGURE 10 – Les trois angles d'EULER permettant de définir l'orientation d'une base par rapport à une autre.

Les angles d'EULER sont très souvent utilisés pour représenter l'orientation d'un solide libre dans un espace d'observation de par leur simplicité d'utilisation. Cependant, ils présentent des points singuliers qui empêchent le calcul de l'orientation dans certaines positions. En effet lorsque la deuxième rotation, autour de l'axe \vec{u} , est nulle ou multiple de π , il est impossible de différencier les deux autres rotations car dans ce cas les axes \vec{z}_0 et \vec{z} sont confondus.

Angles de Cardan Ce paramétrage est basé sur une orientation privilégiée définie à partir de la direction longitudinale (de l'avion) notée \vec{x} , de la direction transversale notée \vec{y} et de la direction verticale ascendante notée \vec{z} . Il fait intervenir trois angles de rotations planes successives dits de roulis γ , de tangage β et de lacet α , parfois abrégés RTL.

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xleftarrow[\text{Lacet}]{\text{Rot}(\vec{z}_0, \alpha)} (\vec{w}, \vec{u}, \vec{z}_0) \xleftarrow[\text{Tangage}]{\text{Rot}(\vec{u}, \beta)} (\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) \xleftarrow[\text{Roulis}]{\text{Rot}(\vec{x}, \gamma)} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

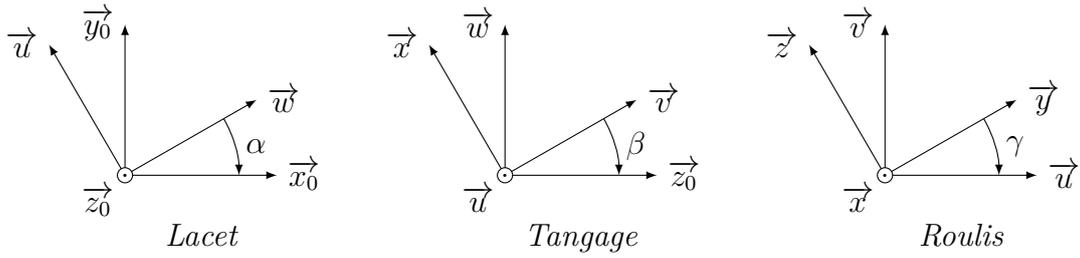
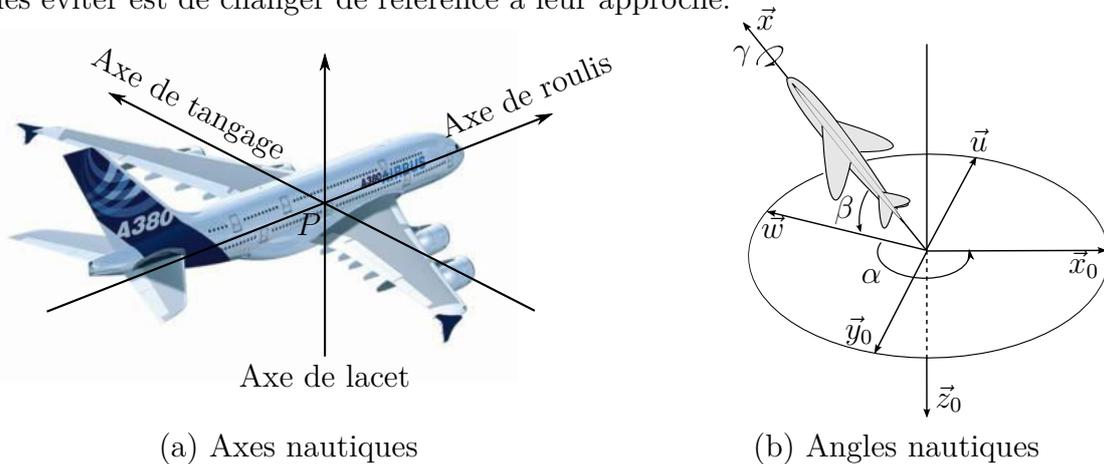


FIGURE 11 – Les trois angles de CARDAN (ou angles nautiques) permettant de définir l’orientation d’une base par rapport à une autre.

Les angles de CARDAN sont très utilisés en aéronautique et la convention aérospatiale considère d’ailleurs la transformation « 3-2-1 » comme transformation de référence (figure 12b). On notera enfin que, comme les angles d’EULER, les angles de CARDAN présentent des points singuliers connus sous le terme de « blocages de CARDAN ». Ces points singuliers apparaissent lorsque le deuxième angle β est égal à $\pm\pi/2$ et le seul moyen de les éviter est de changer de référence à leur approche.



(a) Axes nautiques

(b) Angles nautiques

FIGURE 12 – Définition des axes nautiques (a) et des trois angles nautiques (b) utilisés pour paramétrer l’orientation des avions selon les normes DIN 9300.

3 Modélisation et paramétrage des mécanismes

Les systèmes étudiés peuvent être constitués de une à plusieurs milliers de pièces liées entre elles pour transmettre des efforts ou des mouvements. Dans cette partie, nous présentons les outils permettant de modéliser et paramétrer ces systèmes en vue d’une étude cinématique.

3.1 Contacts entre solides

Nous avons défini dans ce qui précède (cf. § 2.3), le placement libre d’un solide par rapport à un autre, c’est-à-dire possédant six degrés de liberté. Dans la plupart des mécanismes, les solides sont liés entre eux et les mouvements relatifs sont limités par la

nature des surfaces en contact. La nature géométrique de ces surfaces de contact – dites fonctionnelles – va autoriser certains mouvements et en interdire d'autres. C'est à partir de l'analyse de ces surfaces que l'on choisit de modéliser un contact entre deux pièces par une (ou plusieurs) liaison(s) cinématique(s). Les différentes associations de surfaces sont présentées dans la table 1.

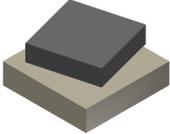
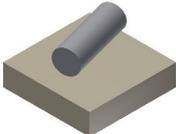
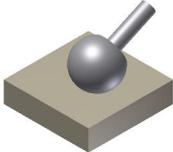
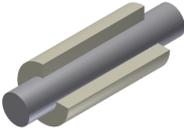
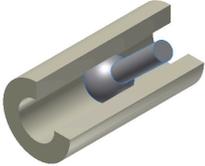
	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	 Contact plan	 Contact linéaire rectiligne (droite)	 Contact ponctuel
Cylindre		 Contact cylindrique	 Contact linéaire annulaire (cercle)
Sphère			 Contact sphérique

TABLE 1 – Différentes associations de surfaces élémentaires et géométrie des contacts.

Chaque mouvement autorisé par la géométrie du contact doit être associé à un paramètre géométrique variable. Si le contact entre deux pièces n'autorise aucun mouvement, les pièces sont dites en liaison complète.

Définition 3.1 (Classe d'équivalence)

Une classe d'équivalence est un ensemble de pièces en liaison complète ou encastrement, démontable ou non. Toutes les pièces faisant partie d'une même classe d'équivalence ont donc le même mouvement lors du fonctionnement du mécanisme.

3.2 Liaisons normalisées

Les liaisons permettent de supprimer un certain nombre de degrés de liberté pour satisfaire une exigence de mouvement donnée. Les différentes liaisons simples sont construites par association des six contacts élémentaires. Les modèles de liaisons sont basés sur une

géométrie parfaite, c'est-à-dire sans jeu. Ils sont répertoriés dans ce qui suit avec un paramétrage adapté donné dans la table 2.

Liaison encastrement La liaison encastrement est une liaison complète entre deux pièces, sans aucun degré de liberté.

Liaison glissière Une liaison glissière entre deux solides S_1 et S_2 autorise un mouvement de translation suivant une seule direction. Cette liaison ne possède donc qu'un seul degré de liberté.

Liaison pivot Une liaison pivot entre deux solides S_1 et S_2 autorise un mouvement de rotation autour d'un seul axe. Cette liaison ne possède donc qu'un seul degré de liberté.

Liaison pivot glissant Une liaison pivot glissant entre deux solides S_1 et S_2 autorise deux mouvements : un mouvement de rotation et un mouvement de translation suivant le même axe. Cette liaison possède donc deux degrés de liberté.

Liaison appui-plan Une liaison appui-plan entre deux solides S_1 et S_2 permet de bloquer une translation et deux rotations. Cette liaison possède donc trois degrés de liberté.

Liaison sphérique Une liaison sphérique entre deux solides S_1 et S_2 autorise toutes les rotations mais aucune translation. Cette liaison possède donc trois degrés de liberté.

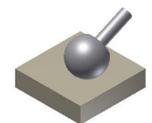
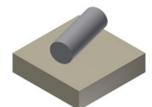
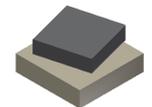
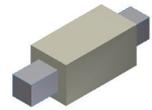
Liaison sphérique à doigt Une liaison sphérique à doigt entre deux solides S_1 et S_2 correspond à une liaison sphérique pour laquelle une des trois rotations a été bloquée. Cette liaison ne possède donc que deux degrés de liberté.

Liaison cylindre-plan Une liaison cylindre-plan entre deux solides S_1 et S_2 autorise deux rotations et deux translations. Cette liaison possède donc quatre degrés de liberté.

Liaison sphère-cylindre Une liaison sphère-cylindre entre deux solides S_1 et S_2 correspond à une liaison sphérique pour laquelle une des trois translations a été libérée. Cette liaison possède donc quatre degrés de liberté.

Liaison sphère-plan Une liaison sphère-plan entre deux solides S_1 et S_2 ne bloque qu'une translation selon la normale au plan. Tous les autres mouvements sont possibles. Cette liaison possède donc cinq degrés de liberté.

Liaison hélicoïdale Une liaison hélicoïdale entre deux solides est caractérisée par son pas p , à gauche ou à droite, tel que les mouvements de rotation et de translation suivant son axe soient liés. Cette liaison possède donc un seul degré de liberté.



Liaison	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Repère local	Mobilité(s)
Glissière			direction \vec{u}	1 translation
Pivot			axe (A, \vec{u})	1 rotation
Pivot glissant			axe (A, \vec{u})	1 translation 1 rotation
Hélicoïdale			axe (A, \vec{u})	1 translation & 1 rotation liées
Appui-plan			normale \vec{n}	2 translations 1 rotation
Sphérique			centre C	3 rotations
Sphérique à doigt			centre C	2 rotations
Cylindre-plan			normale (A, \vec{n}_1) + axe (A, \vec{u}_2)	2 translations 2 rotations
Spère-cylindre			axe (C, \vec{u})	1 translation 3 rotations
Sphère-plan			normale (C, \vec{n})	2 translations 3 rotations

TABLE 2 – Liaisons élémentaires.

3.3 Graphe des liaisons

Ce graphe formalise l'ensemble des mouvements possibles d'un mécanisme. Pour le représenter, il faut tout d'abord chercher les classes d'équivalence du système, c'est-à-dire les ensembles de pièces qui n'ont pas de mouvement relatif entre elles. Chaque classe d'équivalence est représentée par un sommet du graphe et chaque arc entre les sommets représente la liaison entre ces classes. On rappelle que les liaisons sont définies à partir des surfaces de contact. Si deux classes d'équivalence n'ont pas de contact géométrique, aucun arc ne relie les deux sommets.

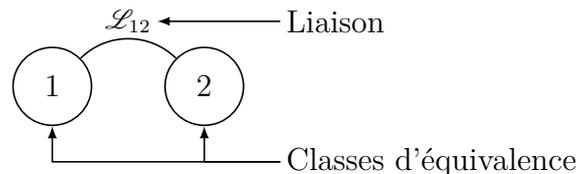


FIGURE 13 – Éléments du graphe de structure.

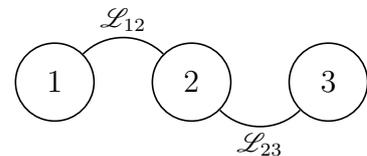
On peut détailler les différentes topologies de graphes de structures (ou de liaisons) que l'on peut rencontrer à partir de l'analyse des cycles. On appelle **cycle** (ou boucle ou chaîne fermée) un chemin fermé extrait d'un graphe de structure tel qu'en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet. On appelle **nombre cyclomatique** d'un graphe de structure, noté γ , le nombre de cycles indépendants qui le constituent. La théorie des graphes montre que ce nombre ne dépend que du nombre de sommets et du nombre d'arcs et s'écrit :

$$\gamma = L - S + 1$$

où L est le nombre de liaisons et S le nombre de solides. Pour chaque cycle, on peut écrire deux équations de fermeture géométrique : une équation vectorielle linéaire associée aux différences de position des centres des repères et une fermeture angulaire associée aux différences d'orientation des vecteurs de base. La projection de chacune de ces équations conduit à trois équations scalaires dans le cas d'un problème plan.

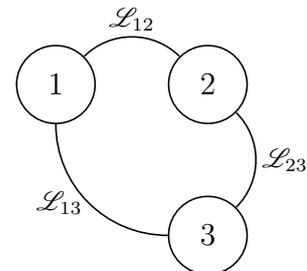
3.3.1 Chaîne ouverte

Un mécanisme sans cycle a un nombre cyclomatique nul : $\gamma = 0$. Ce genre de graphe est typique de la robotique. On peut avoir un déplacement maximal en fin de chaîne avec un minimum de liaisons.



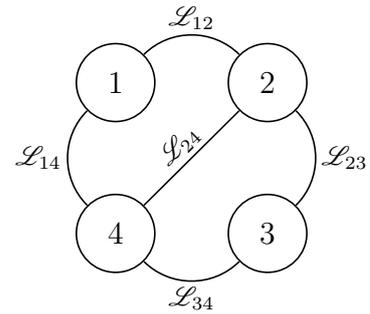
3.3.2 Chaîne fermée

Dans ce type de structure, les liaisons permettent de relier l'ensemble des classes d'équivalence en un seul cycle fermé : $\gamma = 1$. Les paramètres des liaisons du système ne sont pas indépendants. On peut alors écrire deux équations vectorielles de fermeture géométrique : une linéaire et une angulaire.



3.3.3 Chaîne complexe

Dans la pratique, les systèmes sont souvent basés sur des chaînes complexes. On peut alors faire apparaître plusieurs cycles fermés : $\gamma > 1$. Dans l'exemple on a 3 cycles, mais il suffit d'en parcourir 2 pour être passé par tous les solides et toutes les liaisons, donc seuls $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$ cycles sont indépendants. On peut alors écrire 2γ équations de fermeture géométrique conduisant à 6γ équations scalaires.



3.4 Schéma cinématique d'un mécanisme

Le schéma cinématique minimal est un outil de communication technique qui doit traduire la structure d'un système d'un point de vue mécanique. Il permet d'exprimer la fonction globale d'un système technique sans préjuger des solutions retenues, en explicitant l'utilité des différentes liaisons entre les pièces et justifiant les mouvements des pièces et composants technologiques constituant le mécanisme étudié. Le fonctionnement cinématique est traduit suivant une représentation graphique des liaisons et éléments de contact. Un « bon » schéma cinématique doit être clair, lisible, précis et concis, en faisant apparaître de façon évidente le principe de fonctionnement. C'est pour cette raison que l'on va réduire le schéma à sa plus simple expression afin de faire apparaître clairement les mobilités contenues dans ce mécanisme en vue d'une étude cinématique.

Méthodologie de construction du schéma cinématique :

Le but de cette partie est de donner la méthodologie pour construire la schématisation d'un mécanisme en vue d'une étude cinématique. Commençons par préciser que le mécanisme que l'on se propose d'étudier est en général décrit par un certain nombre de documents :

- plan d'ensemble (vues, coupes, sections, vues partielles, . . .) ;
- nomenclature ;
- dessins de définition de certaines pièces ;
- notice explicative, indications fonctionnelles, etc.

À partir de ces documents, il faut successivement :

1. Identifier les entrées et sorties du mécanisme, sans se préoccuper de sa structure interne, c'est-à-dire :
 - les pièces qui reçoivent un mouvement de l'extérieur (mouvement d'entrée) ;
 - les pièces qui transmettent un mouvement vers l'extérieur (mouvement de sortie).

Dans cette recherche, la nomenclature peut fournir des informations précieuses ; par exemple : arbre d'entrée, vérin, manivelle de commande, etc.

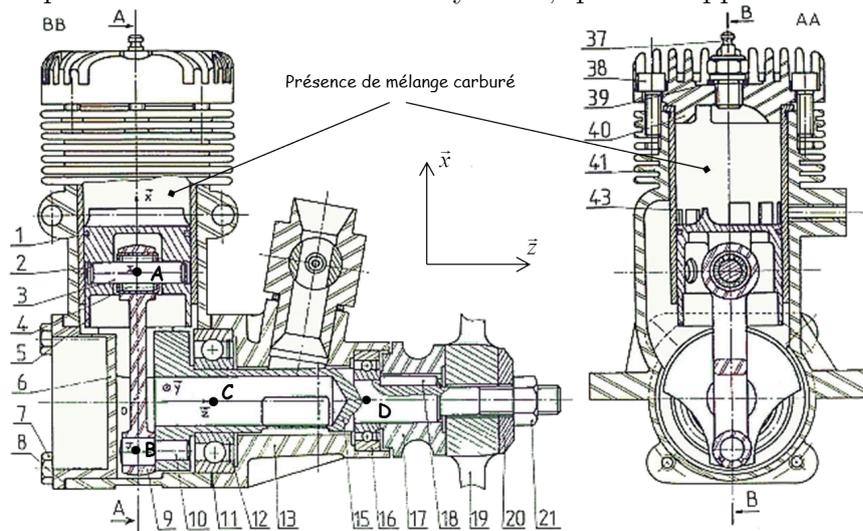
2. Identifier les chaînes cinématiques internes au mécanisme, c'est-à-dire les pièces qui interviennent successivement dans la transmission d'un mouvement d'entrée vers une sortie. Il est important de distinguer :
 - les chaînes de transmission de puissance ;
 - les chaînes de réglage et de verrouillage.
3. Déterminer les classes d'équivalence et les nommer avec le nom de la pièce la plus importante.
4. Identifier la nature des contacts entre les différentes classes d'équivalence et associer à un contact ou un ensemble de contacts un modèle de liaison élémentaire.
5. Construire le graphe de structure.
6. Construire le schéma cinématique (d'architecture) en trois étapes :
 - mise en place du centre des liaisons sur un schéma vierge ;
 - représentation des schémas normalisés des liaisons en accord avec le repère local ;
 - raccord entre les liaisons (en faisant attention aux pièces contenant et aux pièces contenues).
7. Simplifier le schéma cinématique en supprimant les liaisons redondantes et/ou en remplaçant des ensembles de liaisons par des liaisons cinématiquement équivalentes afin d'obtenir un **schéma cinématique minimal**.

Remarque 3.1 (Représentation du schéma cinématique minimal)

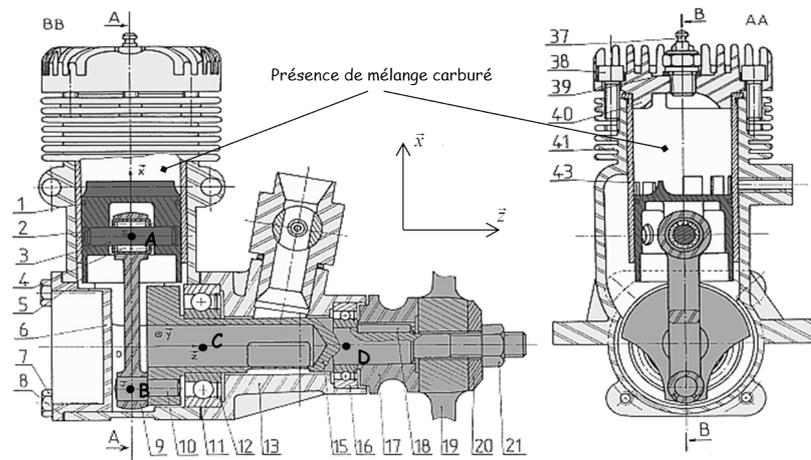
Dans la mesure du possible, on se limitera à une représentation plane du schéma cinématique minimal si elle est suffisante pour décrire le fonctionnement cinématique du mécanisme étudié.

Exemple 3.1 (Moteur thermique d'aéromodélisme)

Le support de l'étude est un moteur thermique deux temps utilisé en aéromodélisme. On donne ci-après le dessin d'ensemble du système, que l'on appellera *micromoteur*.

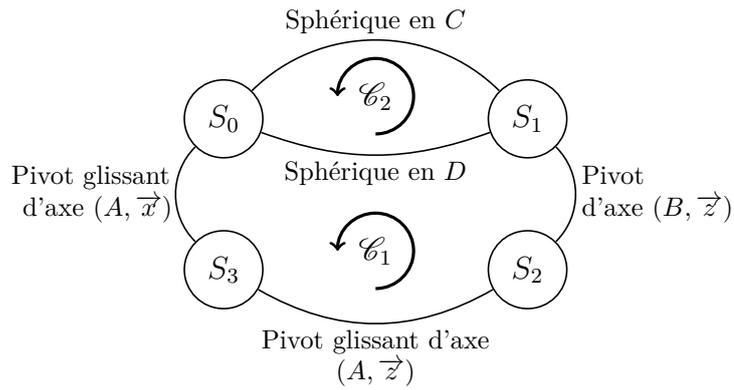


1. Pour identifier l'entrée et la sortie, commençons par rappeler qu'un moteur thermique permet de créer une énergie mécanique de rotation à partir d'une explosion. L'entrée se fera donc sur le piston (1) et la sortie sur l'hélice (19) liée au vilebrequin (15).
2. Le mécanisme ne comporte qu'une seule chaîne cinématique de type transmission de puissance passant successivement par le piston (1), l'axe (3), la bielle (9) et le vilebrequin (15).
3. Pour identifier les classes d'équivalence, on recherche toutes les pièces en liaison complète que l'on colorie sur le plan d'ensemble avec une même couleur (une par classe d'équivalence).



Il vient quatre classes d'équivalence :

- Carter $S_0 = \{6, 7, 8, 11, 13, 37, 38, 39, 40, 41, 43\}$
 - Vilebrequin $S_1 = \{10, 15, 17, 19, 20, 21\}$
 - Bielle $S_2 = \{9\}$
 - Piston $S_3 = \{1, 2, 3, 5\}$
4. Pour identifier la nature des liaisons entre les différentes classes d'équivalence, il est nécessaire d'identifier la nature des contacts. L'analyse du dessin d'ensemble a permis d'identifier :
 - un contact cylindre-cylindre entre S_0 et S_3 que l'on peut modéliser par une liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{x}) ;
 - un contact cylindre-cylindre entre S_2 et S_3 que l'on peut modéliser par une liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{z}) ;
 - un contact cylindre-cylindre et deux contacts plan-plan (un de chaque côté) entre S_1 et S_2 que l'on peut modéliser par une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) ;
 - deux contacts sphériques au niveau des roulements à billes (12) et (16) que l'on peut modéliser pour chacun par une liaison sphérique, respectivement centrée au point C et au point D .
 5. Une fois les liaisons identifiées, on place quatre nœuds correspondants aux classes d'équivalence que l'on relie avec les cinq arcs correspondants aux liaisons identifiées.

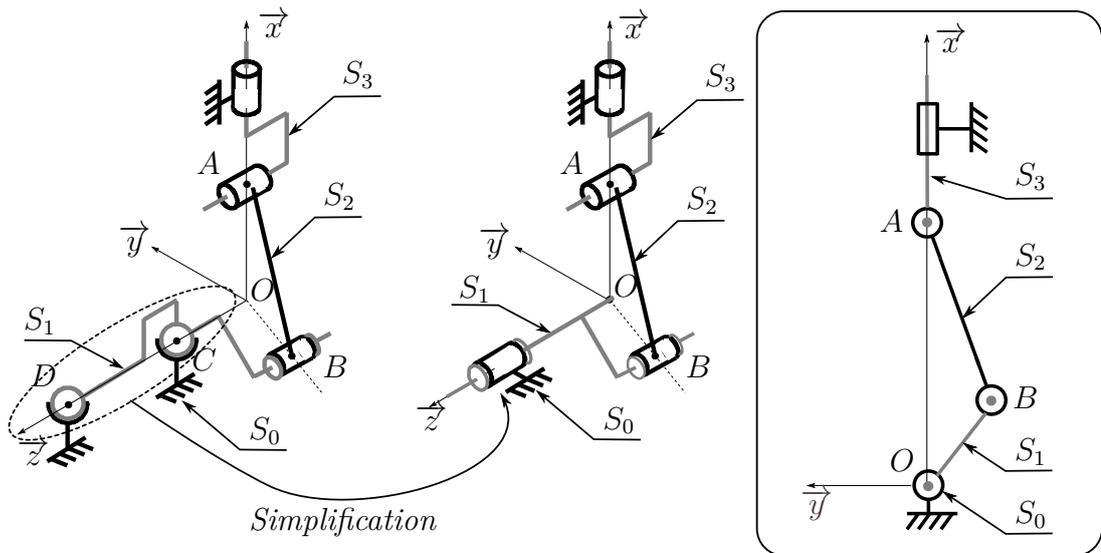


Avec cinq liaisons ($L = 5$) et quatre solides ($S = 4$), ce graphe de structure comporte

$$\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$$

cycles indépendants (notés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sur le graphe). Les deux liaisons entre S_0 et S_1 sont dites en parallèles.

6. On peut réaliser le schéma cinématique avec un point de vue tridimensionnel ou plan.



7. Le point de vue tridimensionnel permet d'identifier immédiatement que si notre étude ne concerne que le fonctionnement cinématique du mécanisme, alors les deux liaisons sphériques peuvent être associées pour former une seule liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) . (Nous reviendrons sur cette notion dans le cours sur la théorie des mécanismes). À partir de cette simplification, il est clair qu'une schématisation plane suffira amplement à décrire le fonctionnement cinématique du système et c'est cette dernière que l'on appellera le schéma cinématique minimal du micromoteur.

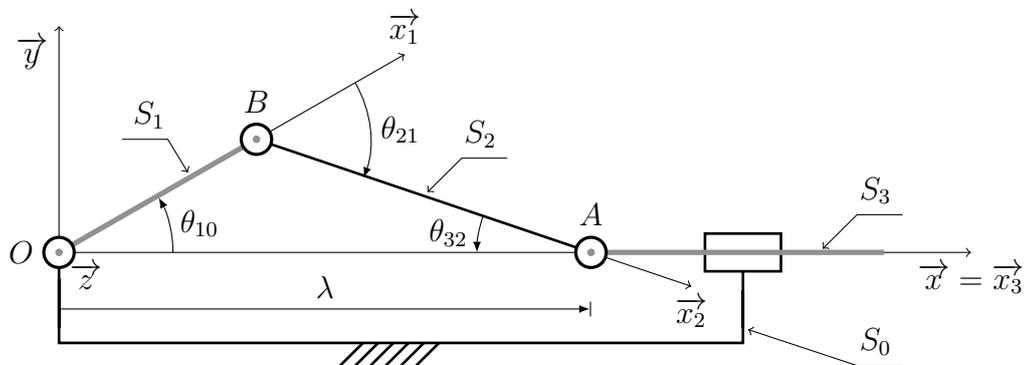
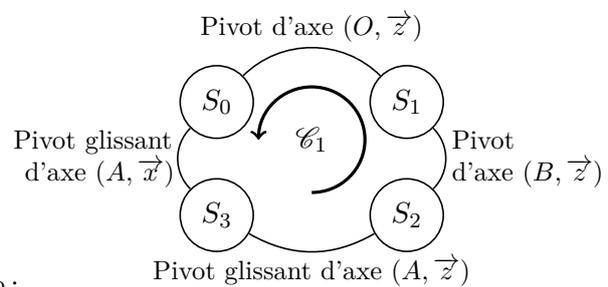
3.5 Loi « entrée–sortie » d'un mécanisme : fermeture géométrique

À partir d'un schéma cinématique paramétré d'un mécanisme comportant au moins un cycle, on peut réaliser autant de fermetures géométriques que de cycles indépendants en écrivant pour chaque cycle deux relations géométriques vectorielles (une linéaire et une angulaire) faisant intervenir les points caractéristiques du schéma cinématique. En projetant ensuite les deux expressions obtenues pour chaque cycle suivant les trois vecteurs d'une même base, on peut déterminer autant de relations que de cycles entre les paramètres géométriques. Quand cette relation permet de relier un paramètre d'entrée et un paramètre de sortie, la relation sera une loi « entrée–sortie ».

Exemple 3.2 (Moteur thermique d'aéromodélisme)

Le schéma cinématique minimal du micromoteur établi fait apparaître un seul cycle (\mathcal{C}_1). Il est donc possible d'écrire deux équations vectorielles de fermeture géométrique. Pour écrire ces équations, il est nécessaire de paramétrer le schéma cinématique minimal avec :

- les repères associés à chaque solide ;
- la définition des caractéristiques géométriques utiles de chaque solide ;
- le paramétrage de chaque liaison.



Paramétrage

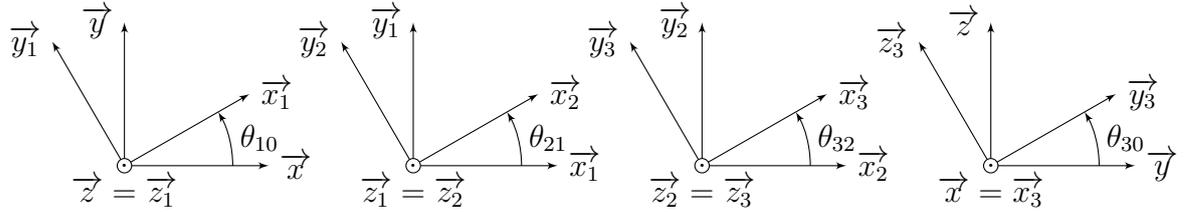
On note e l'excentricité du vilebrequin (S_1) et l_b l'entraxe de la bielle (S_2), deux constantes géométriques telles que $\overrightarrow{OB} = e \vec{x}_1$ et $\overrightarrow{BA} = l_b \vec{x}_2$. Il n'est pas nécessaire de paramétrer la longueur du piston (S_3) puisqu'elle ne change rien au mouvement, tout comme le carter (S_0). À chaque liaison pivot ou pivot glissant, on associe un angle :

- $\theta_{10} = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ l'angle permettant de définir la position angulaire du vilebrequin par rapport au carter ;
- $\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ l'angle permettant de définir la position angulaire de la bielle par rapport au vilebrequin ;

- $\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ l'angle permettant de définir la position angulaire du piston par rapport à la bielle ;
- $\theta_{30} = (\vec{y}, \vec{y}_3) = (\vec{z}, \vec{z}_3)$ l'angle permettant de définir la position angulaire du piston par rapport au carter.

Enfin, on définit la translation autorisée par la liaison pivot glissant avec un paramètre linéaire λ tel que la position instantanée du piston par rapport au carter soit $\vec{OA} = \lambda \vec{x}$. Le paramétrage de chacune des liaisons du mécanisme nécessite donc cinq paramètres : θ_{10} , θ_{21} , θ_{32} , θ_{30} et λ .

On trace ensuite immédiatement les figures géométrales associées à la définition de chaque angle et qui serviront de support de calcul des produits scalaires et vectoriels.



Fermeture géométrique angulaire

Nous sommes ici dans cas particulier de rotations autour d'axes perpendiculaires pour lequel la fermeture géométrique angulaire peut s'écrire simplement. De plus, comme aucune rotation ne se fait autour de l'axe \vec{y} , la fermeture angulaire se limite à deux équations scalaires suivant les axes \vec{x} et \vec{z} qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & & -\theta_{30} &= 0 \\ / \vec{z} : & & \theta_{32} + \theta_{21} + \theta_{10} &= 0 \end{aligned}$$

À partir de la relation suivant \vec{x} , on peut en déduire qu'il n'y aura pas de mouvement de rotation du piston par rapport au carter ($\theta_{30} = 0$). La seconde relation permet de savoir que les trois angles θ_{10} , θ_{21} et θ_{32} sont liés. En pratique, c'est l'angle θ_{21} qui ne sera pas considéré comme un paramètre cinématique du problème et simplement exprimé en fonction des deux autres angles s'il s'avère utile pour calculer une projection.

Fermeture géométrique linéaire

La relation de fermeture géométrique linéaire s'écrit :

$$\vec{OB} + \vec{BA} + \vec{AO} = e \vec{x}_1 + \ell_b \vec{x}_2 - \lambda \vec{x} = \vec{0}$$

Comme les positions relatives des points sont constantes selon l'axe \vec{z} , seules les projections suivant les axes \vec{x} et \vec{y} peuvent apporter des informations. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & & e \cos(\theta_{10}) + \ell_b \cos(\theta_{32}) - \lambda &= 0 \\ / \vec{y} : & & e \sin(\theta_{10}) - \ell_b \sin(\theta_{32}) &= 0 \end{aligned}$$

De la deuxième expression on tire celle de $\cos(\theta_{32}) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_{32})}$ sous la forme :

$$\sin(\theta_{32}) = \frac{e}{\ell_b} \sin(\theta_{10}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta_{32}) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{e}{\ell_b}\right)^2 \sin^2(\theta_{10})}$$

où le signe de $\cos(\theta_{32})$ reste indéterminé. Pour lever cette indétermination, il est nécessaire de remarquer que λ doit être maximal lorsque θ_{10} est nul, ce qui implique que le signe sera un plus. Il vient alors pour la première projection :

$$\lambda = e \cos(\theta_{10}) + \sqrt{(\ell_b)^2 - e^2 \sin^2(\theta_{10})}$$

Cette expression ne relie que deux paramètres cinématiques λ et θ_{10} , respectivement associés au mouvement de translation du piston par rapport carter en entrée et au mouvement de rotation du vilebrequin par rapport carter en sortie. C'est donc la loi entrée-sortie du mécanisme recherchée.

4 Trajectoire, champ des vecteurs vitesse et accélération

On considère dans ce qui suit un solide \mathcal{S} auquel est associé un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

4.1 Trajectoire d'un point d'un solide dans un référentiel

Chaque point M d'un solide \mathcal{S} en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 , occupe à chaque instant t une position dans le repère \mathcal{R}_0 telle que les points $M \in \mathcal{S}$ et $M(t) \in \mathcal{R}_0$ coïncident. Au cours du temps, chaque point $M \in \mathcal{S}$ décrit alors une courbe $\mathcal{C}(M)$ dans le repère \mathcal{R}_0 appelée **trajectoire** du point $M \in \mathcal{S}$ dans le repère \mathcal{R}_0 .

Définition 4.1 (Trajectoire d'un point d'un solide)

La trajectoire d'un point $M \in \mathcal{S}$ par rapport à un référentiel \mathcal{R}_0 est le lieu des positions successives occupées par le point M dans le repère \mathcal{R}_0 au cours du temps. C'est donc une courbe dans \mathcal{R}_0 définie par :

$$\mathcal{C}(M) = \{M(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{R}_0$$

Une trajectoire est orientée et suit le sens du mouvement.

Remarque 4.1 (Une trajectoire est toujours définie dans un repère)

La trajectoire d'un point d'un solide dépend du référentiel d'observation choisi : il est donc impossible de parler de trajectoire sans mentionner explicitement un repère !

4.2 Vitesse d'un point d'un solide par rapport à un référentiel

Sauf dans le cas particulier d'un mouvement de translation, parler de la vitesse d'un solide n'a pas de sens. Par contre, on peut toujours définir la vitesse de chaque point d'un solide \mathcal{S} en mouvement dans un repère \mathcal{R}_0 .

Définition 4.2 (Vitesse d'un point d'un solide)

La vitesse instantanée d'un point $M \in \mathcal{S}$ dans son mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 , d'origine O_0 , est égale à la dérivée par rapport au temps et à l'instant t du vecteur position $\overrightarrow{O_0M(t)}$ dans la base du repère \mathcal{R}_0 ; formellement :

$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{O_0M(t + \Delta t)} - \overrightarrow{O_0M(t)}}{\Delta t} \right) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{R}_0}$$

Remarque 4.2 (Dérivation et base)

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur n'a de sens que dans une base associée à un espace d'observation. Si on prend \mathcal{R}_0 comme repère d'observation, de base \mathcal{B}_0 , alors la dérivée peut se noter indifféremment dans la base \mathcal{B}_0 ou dans le repère \mathcal{R}_0 .

Remarque 4.3 (Notation des vecteurs vitesses)

Comme le vecteur position, le vecteur vitesse dépend de l'instant choisi. Cependant, afin d'alléger les notations, cette dépendance ne sera jamais mentionnée explicitement.

On peut représenter graphiquement les vecteurs vitesses par des flèches dont :

- l'origine est confondue avec la position du point M à l'instant t ;
- le support (direction) est tangent à la trajectoire du point M dans le repère \mathcal{R}_0 ;
- le sens est celui du mouvement ;
- la norme est la valeur de la vitesse en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE – Dérivation vectorielle

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel orienté de dimension 3 (l'ensemble des vecteurs de l'espace). Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de \mathcal{V} . Soit $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$ une application de classe C^1 , appelée fonction vectorielle. Les composantes de \vec{u} dans \mathcal{B} sont trois applications $(u_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} respectivement définies comme

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, u_i(t) = \vec{u}(t) \cdot \vec{e}_i.$$

Pour faire simple, $\vec{u}(t)$ est un vecteur dont les composantes varient dans le temps.

Définition 4.3 (Dérivée d'une fonction vectorielle)

La dérivée de \vec{u} à l'instant t dans la base \mathcal{B} est le vecteur :

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{B}} = \frac{du_1}{dt}(t) \vec{e}_1 + \frac{du_2}{dt}(t) \vec{e}_2 + \frac{du_3}{dt}(t) \vec{e}_3$$

admettant comme composantes dans la base \mathcal{B} les dérivées par rapport au temps des composantes dans \mathcal{B} .

Propriété 4.1

Soient \vec{u} et \vec{v} deux applications de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathcal{V} , f et g deux applications

de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et \mathcal{B} une base orthonormée directe de \mathcal{V} , alors il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} &= \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \\ \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{v})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} &= \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \\ \frac{d(f\vec{u} + g\vec{v})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} &= \frac{df}{dt} \vec{u} + f \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} + \frac{dg}{dt} \vec{v} + g \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

avec une notation « fonctions » supprimant les dépendances explicites en t .

Définition 4.4 (Vecteur mobile)

On appelle vecteur mobile sur \mathcal{V} une application non constante de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathcal{V} .

Proposition 4.1 (Dérivée d'un vecteur mobile unitaire)

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur mobile unitaire est orthogonale à ce vecteur.

Démonstration. Soit $\vec{u}(t)$ un vecteur mobile unitaire quelconque tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|\vec{u}(t)\| = 1$; d'où :

$$\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = 2 \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \cdot \vec{u} = 0$$

Comme \vec{u} est non nul, pour que le produit scalaire soit nul :

- soit $\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = \vec{0}$, c'est-à-dire que les composantes du vecteur \vec{u} sont constantes dans \mathcal{B} , ce qui n'est pas possible pour un vecteur mobile ;
- soit les vecteurs \vec{u} et $\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}$ sont orthogonaux.

□

Définition 4.5 (Base mobile)

On appelle base mobile sur \mathcal{V} l'application $\mathcal{B} : t \mapsto (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ qui associe à chaque instant une base orthonormée directe constituée de trois vecteurs mobiles unitaires.

Proposition 4.2 (Taux de rotation)

Il existe un unique vecteur permettant de définir le taux de rotation d'une base mobile orthonormée directe $\mathcal{B}(t) = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ par rapport à une base orthonormée

directe \mathcal{B}_0 , noté $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$, tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}(t) \wedge \vec{e}_i(t)$$

Démonstration. Pour démontrer l'existence et l'unicité du taux de rotation, commençons par exploiter la propriété de normalité des vecteurs de la base mobile \mathcal{B} tel que l'on puisse écrire chaque vecteur dérivé comme une combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 \\ \left. \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_3 \\ \left. \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

impliquant au total six réels $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3, i \neq j}$. Comme les trois vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 &\implies \vec{e}_1 \cdot \left. \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \vec{e}_2 \cdot \left. \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = 0 \iff a_{21} + a_{12} = 0 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 &\implies \vec{e}_1 \cdot \left. \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \vec{e}_3 \cdot \left. \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = 0 \iff a_{31} + a_{13} = 0 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 &\implies \vec{e}_2 \cdot \left. \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \vec{e}_3 \cdot \left. \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = 0 \iff a_{32} + a_{23} = 0 \end{aligned}$$

Il ne reste donc que trois paramètres indépendants. En ne conservant que a_{12} , a_{23} et a_{31} , il vient alors :

$$\left. \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = a_{12}\vec{e}_2 - a_{31}\vec{e}_3, \quad \left. \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = -a_{12}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = a_{31}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2$$

qui peut s'écrire

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = a_{23}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_2 + a_{12}\vec{e}_3.$$

□

Théorème 4.1 (Dérivation vectorielle)

Les dérivées temporelles d'un vecteur \vec{v} mobile dans deux bases différentes \mathcal{B}_0 et \mathcal{B} liées entre elles par le taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$ sont liées par la relation :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{v}$$

souvent appelée « formule de Bour ».

Démonstration. Soit $\vec{v}(t)$ un vecteur mobile quelconque dont les composantes dans la base mobile $\mathcal{B}(t) = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ sont trois applications de classes C^1 telles qu'il s'écrive :

$$\vec{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \vec{e}_i(t)$$

Par application des règles de dérivation, il vient :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv_i}{dt}(t) \vec{e}_i(t) + v_i(t) \left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} \right)$$

Comme les vecteurs dérivés des vecteurs de la base mobile sont définis comme

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{e}_i$$

par simple substitution il vient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv_i}{dt}(t) \vec{e}_i(t) + v_i(t) \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{e}_i \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv_i}{dt}(t) \vec{e}_i(t) \right)}_{\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \underbrace{\left(\sum_{i=1}^3 v_i(t) \vec{e}_i \right)}_{\vec{v}(t)} \end{aligned}$$

□

4.3 Vecteur vitesse angulaire d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel

Pour connaître les variations temporelles de l'orientation d'un solide \mathcal{S} – auquel on a associé un repère \mathcal{R} , de base \mathcal{B} – dans un référentiel \mathcal{R}_0 , de base \mathcal{B}_0 , il est nécessaire de définir le taux de rotation ou vecteur vitesse angulaire d'un solide.

Définition 4.6 (Vecteur vitesse angulaire)

Le vecteur vitesse angulaire ou de rotation (instantané) du solide \mathcal{S} dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 correspond au vecteur

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$$

où $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$ est le taux de rotation qui caractérise les changements d'orientation de la base \mathcal{B} par rapport à la base \mathcal{B}_0 :

- sa direction correspond à l'axe autour duquel la base \mathcal{B} tourne par rapport à la base \mathcal{B}_0 ;
- son sens correspond à celui de la rotation (selon la règle de la main droite) ;
- sa norme correspond à la vitesse angulaire en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ à laquelle se fait cette rotation.

Propriété 4.2 (Antisymétrie du taux de rotation)

Le vecteur taux de rotation est anti-symétrique :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}}$$

Démonstration. D'après la formule de dérivation vectorielle, on a pour tout vecteur \vec{v} non nul :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{v} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}} \wedge \vec{v}$$

d'où :

$$\forall \vec{v} \neq \vec{0}, \quad (\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}}$$

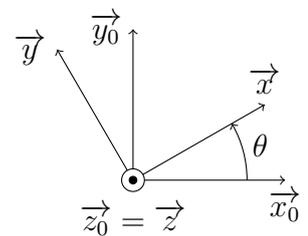
□

Proposition 4.3 (Taux de rotation plane)

Lorsque deux bases orthonormées directes ont un axe confondu, le vecteur taux rotation est porté par l'axe commun et sa composante sur cet axe est la dérivée de l'angle qui repère la rotation.

De façon pratique, on déterminera souvent le taux de rotation reliant deux bases orthonormées directes de l'espace $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, à partir d'une figure géométrale. Ainsi, si le vecteur commun (la normale au plan de la figure) est $\vec{z}_0 = \vec{z}$ et que l'angle orienté défini est $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{y})$ alors le taux de rotation est :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = \dot{\theta} \vec{z}$$



Démonstration. À partir de la figure géométrale, on a :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0 & \implies \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \dot{\theta}(-\sin(\theta)\vec{x}_0 + \cos(\theta)\vec{y}_0) = \dot{\theta}\vec{y} \\ \vec{y} &= \cos(\theta)\vec{y}_0 - \sin(\theta)\vec{x}_0 & \implies \left. \frac{d\vec{y}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \dot{\theta}(-\sin(\theta)\vec{y}_0 - \sin(\theta)\vec{x}_0) = -\dot{\theta}\vec{x} \\ \vec{z} &= \vec{z}_0 & \implies \left. \frac{d\vec{z}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \vec{0} \end{aligned}$$

De la troisième expression, on trouve que le taux de rotation est colinéaire à \vec{z} :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{z} = \vec{0} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = \lambda \vec{z}$$

En exploitant ce résultat dans les deux autres directions puis, par identification, il vient alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{x} = \lambda \vec{y} = \dot{\theta} \vec{y} \\ \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{y} = -\lambda \vec{x} = -\dot{\theta} \vec{x} \end{cases} \iff \lambda = \dot{\theta}$$

d'où le résultat. \square

4.4 Champ de vecteurs vitesses d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel

Puisqu'on associe à chaque solide indéformable un repère, les vecteurs $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$ caractérisent le mouvement du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 . Le solide étant indéformable, il est possible de définir la vitesse en tout point du solide $N \in \mathcal{S}$.

Théorème 4.2 (Champ de vitesses)

Les vecteurs vitesses de deux points M et N d'un solide \mathcal{S} en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R}_0 sont liés par la formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

Démonstration. À partir de la définition, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0N}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}} + \left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

qui avec la relation de dérivation vectorielle

$$\left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}(t)$$

où nous avons exploité l'hypothèse de solide indéformable – qui revient à considérer que l'expression du vecteur \overrightarrow{MN} est constante dans le repère \mathcal{R} – conduit à la relation de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

souvent appelée « formule de Varignon » en hommage au mathématicien français Pierre VARIGNON. \square

Partant de ce point, la connaissance de la vitesse d'un point du solide et du vecteur de rotation du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 permet de définir l'ensemble des vecteurs vitesses appelé **champ des vecteurs vitesses**.

Théorème 4.3 (Équiprojectivité du champ de vitesses)

Le champ des vecteurs vitesses est équiprojectif, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Démonstration. Le solide \mathcal{S} étant indéformable, la longueur (MN) est invariable, ce qui s'écrit

$$\frac{d(\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN})}{dt} = 2 \overrightarrow{MN} \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = 0$$

En exploitant la relation de Chasles $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO_0} + \overrightarrow{O_0N}$ et après division par 2, il vient :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \left(\left. \frac{d\overrightarrow{O_0N}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} - \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \right) = \overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} - \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}) = 0$$

d'où on obtient la définition de l'équiprojectivité du champ de vitesses par simple réarrangement des termes de chaque côté du signe égal. \square

4.5 Torseur cinématique

Les champs vectoriels équiprojectifs (ou antisymétriques) sont appelés torseurs. Dans le cas de la cinématique, le mouvement d'un solide \mathcal{S} dans un référentiel \mathcal{R}_0 sera complètement défini par le torseur cinématique de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R}_0 .

Définition 4.7 (Torseur cinématique)

Le torseur cinématique du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 traduit le champ de vitesses (équiprojectif) du solide \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R}_0 et est noté :

$$\left\{ \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_N$$

Ce torseur est défini en tout point de l'espace et son expression en un point M fait appel aux éléments de réduction du torseur que sont :

- sa résultante $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$, qui est invariante (la même en tout point);
- son moment $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$, qui dépend du point de réduction, ici M .

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE – Torseurs

On note \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace géométrique à trois dimensions et \mathcal{V} l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Définition 4.8 (Torseur)

Un torseur est un champ vectoriel antisymétrique ou équiprojectif défini sur \mathcal{E} et à valeurs dans \mathcal{V} . Il est défini par ses éléments de réduction en un point :

- sa résultante \overrightarrow{R} , qui est invariante (la même en tout point);
- son moment $\overrightarrow{M}(P)$ qui dépend du point de réduction.

On le note :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}(P) \end{array} \right\}$$

Propriété 4.3 (Torseur)

Un torseur est caractérisé par :

- la relation de changement de point :

$$\overrightarrow{M}(Q) = \overrightarrow{M}(P) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

- la propriété d'équiprojectivité :

$$\overrightarrow{M}(P) \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{M}(Q) \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Opérations sur les torseurs

Définition 4.9 (Égalité de deux torseurs)

Deux torseurs sont égaux si et seulement si leurs éléments de réduction en un (même) point sont égaux.

Propriété 4.4 (Addition)

L'addition de deux torseurs est commutative et associative. Les éléments de réduction du torseur résultant en un point sont constitués de la somme des résultantes et de la somme des moments exprimés au même point.

L'élément neutre de l'addition est le torseur nul.

Propriété 4.5 (Multiplication par un réel)

La multiplication d'un torseur par un réel est distributive. Les éléments de réduction

du torseur résultant en un point sont constitués de la résultante et du moment en un point tous deux multipliés par le réel.

Définition 4.10 (Automoment ou invariant scalaire d'un torseur)

L'automoment d'un torseur correspond au produit scalaire de la résultante et du moment du torseur en un point :

$$\forall P \in \mathcal{V}, \mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \vec{R} \cdot \vec{M}(P)$$

C'est un invariant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du point où il est calculé.

Définition 4.11 (Comoment de deux torseurs)

Le comoment de deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ est un scalaire défini par :

$$\{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P) \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(P) \end{array} \right\}_P = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(P)$$

Torseurs particuliers

Définition 4.12 (Torseur nul)

Un torseur nul est un torseur dont les éléments de réduction sont nuls en tout point.

Définition 4.13 (Glisseur)

Un torseur de résultante non nulle est un glisseur si son invariant scalaire est nul. Un glisseur est caractérisé par sa résultante et son axe central.

Définition 4.14 (Torseur couple)

Un torseur couple est un torseur de résultante nulle mais de moment non nul. Il est constant, son invariant scalaire est nul et il n'a pas d'axe central. Il caractérise un champ uniforme.

Réduction en un point Pour définir le torseur cinématique du solide \mathcal{S} par rapport au repère \mathcal{R}_0 en un point M de l'espace, on écrira sous forme vectorielle les éléments de réduction au point M ; par exemple :

$$\left\{ \mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z} \\ r\omega \vec{x} + \lambda \vec{z} \end{array} \right\}_M$$

où l'on prendra soin de toujours définir le point de réduction en le plaçant avant l'accolade dans laquelle on écrira ensuite la résultante et le moment au point choisi et sous forme vectorielle.

4.5.1 Axe central

À chaque instant, tout torseur cinématique dont la résultante est non nulle possède un axe central (figure 14).

Définition 4.15 (Axe central)

L'axe central d'un torseur cinématique correspond à l'ensemble des points A où la vitesse (moment du torseur) est colinéaire au vecteur de rotation (résultante du torseur) :

$$\overrightarrow{V_{A,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

L'axe central est appelé axe instantané de rotation (ou de glissement). Il n'existe que si la résultante est non nulle.

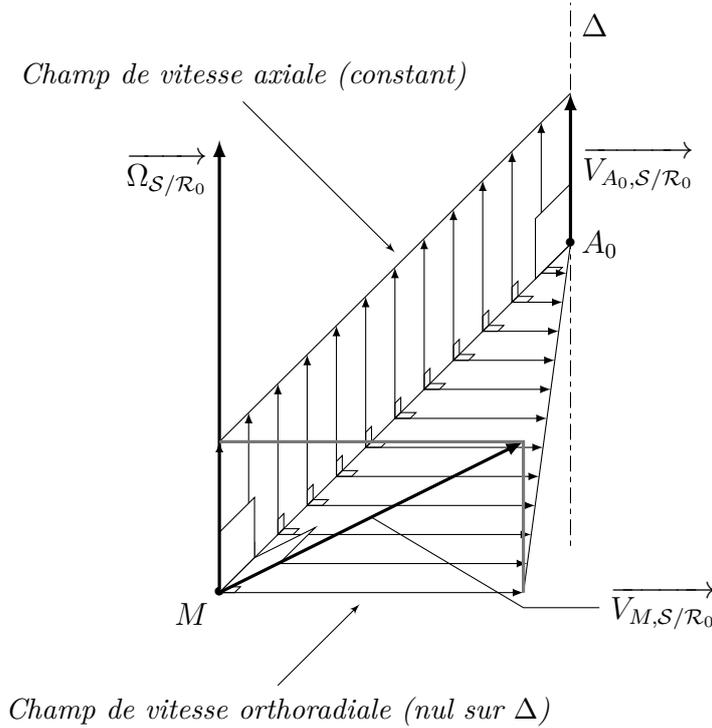


FIGURE 14 – Axe central d'un torseur cinématique.

Théorème 4.4

L'ensemble des points A de l'axe central d'un torseur cinématique du solide \mathcal{S} par rapport au repère \mathcal{R}_0 est défini à partir d'un point M quelconque par la relation :

$$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} - \frac{\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}}{\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit \mathcal{S} un solide en mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 dont on connaît le torseur cinématique au point M :

$$\left\{ \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_M$$

Soit A un point de l'axe central de ce torseur tel que, par définition :

$$\overrightarrow{V_{A,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

En utilisant la relation de changement de point

$$\overrightarrow{V_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MA}$$

il vient :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} + (\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MA}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

Comme par définition l'axe central est une droite de même direction que $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$, il convient de définir un point A_0 tel que $\overrightarrow{MA_0}$ soit perpendiculaire à l'axe central et $\overrightarrow{A_0A}$ suivant cet axe; soit :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{MA_0} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_0A} = \lambda \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$$

telle que l'expression devienne

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} + (\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MA_0}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

À partir de ce point, en utilisant la relation du double produit vectoriel

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

il vient :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} + (\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}) \overrightarrow{MA_0} - \underbrace{(\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MA_0})}_{0} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

conduisant à l'expression :

$$\overrightarrow{MA_0} = -\frac{\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}}{\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}}$$

mentionnant que la direction du vecteur $\overrightarrow{MA_0}$ est la normale au plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$. En ajoutant le vecteur $\overrightarrow{A_0A} = \lambda \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$ à cette expression, on trouve l'expression recherchée. \square

Définition 4.16 (Moment central)

Le moment central est le moment du torseur en un point quelconque de son axe central. La norme du moment central d'un torseur est minimale.

Propriété 4.6 (Axe central d'un glisseur)

Si le moment d'un torseur est nul en un point, ce point appartient à l'axe central et le torseur est un glisseur. L'axe central se définit alors à l'aide de ce point et de la résultante.

Définition 4.17 (Forme canonique d'un torseur)

La forme canonique d'un torseur consiste en l'expression des éléments de réduction en un point de son axe central s'il existe.

4.5.2 Torseur cinématique des liaisons usuelles

Pour l'étude de nos systèmes industriels, il est absolument nécessaire de connaître la forme canonique du torseur cinématique associé aux mouvements permis par chaque liaison normalisée. Ils sont répertoriés dans la table 3.

Liaison	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Torseur cinématique
Glissière			$\forall M \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V \vec{u} \end{Bmatrix}$
Pivot			$\forall B \in (A, \vec{u}), \begin{Bmatrix} \omega \vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
Hélicoïdale			$\forall B \in (A, \vec{u}) \begin{Bmatrix} \omega \vec{u} \\ \frac{p}{2\pi} \omega \vec{u} \end{Bmatrix}_B$ pas p à droite
Pivot glissant			$\forall B \in (A, \vec{u}), \begin{Bmatrix} \omega \vec{u} \\ V \vec{u} \end{Bmatrix}_B$
Appui-plan			$\begin{Bmatrix} \omega \vec{n} \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix}_A \text{ avec } \vec{V}_A \cdot \vec{n} = 0$
Sphérique			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$
Sphérique à doigt			$\begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{u}_1 + \omega_2 \vec{u}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$
Cylindre-plan			$\begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{u}_2 \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix}_A$ avec $\vec{V}_A \cdot \vec{n}_1 = 0$
Sphère-cylindre			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ V \vec{u} \end{Bmatrix}_C$
Sphère-plan			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{V}_C \end{Bmatrix}_C \text{ avec } \vec{V}_C \cdot \vec{n} = 0$

TABLE 3 – Liaisons élémentaires et torseurs cinématiques associés.

4.6 Cas particulier du contact ponctuel

On revient dans cette partie sur la forme du torseur cinématique d'une liaison sphère plan. Cette liaison intervenant très souvent dans les applications de sciences de l'ingénieur, il est usuel de définir certaines notations supplémentaires. Pour les mettre en place, on considère deux solides S_1 et S_2 en contact au point P . Le plan tangent commun (plan osculateur au contact) est noté Π .

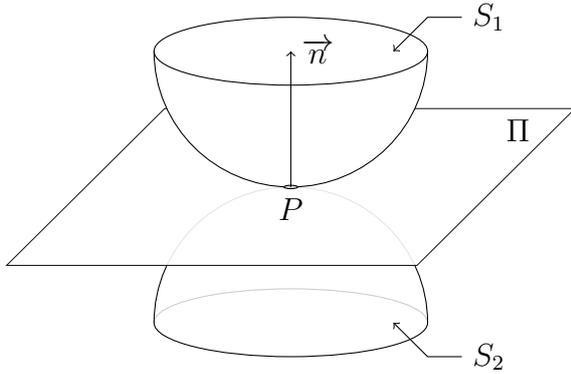


FIGURE 15 – Géométrie du contact ponctuel.

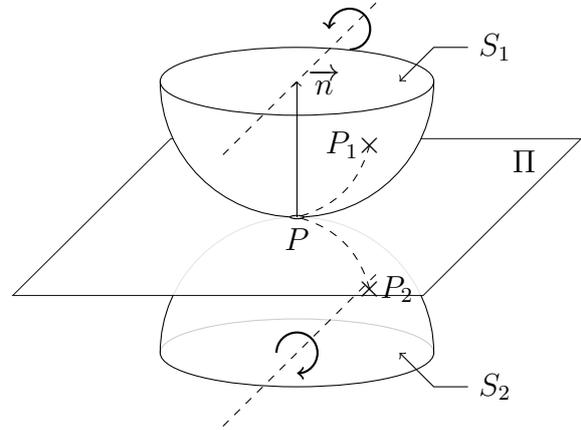


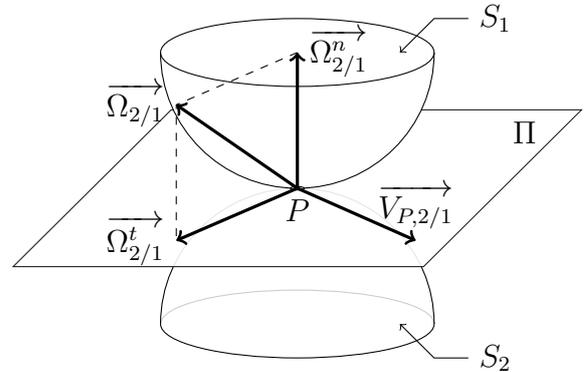
FIGURE 16 – Illustration du point coïncident.

Pour différencier le point de contact des points physiques P_1 et P_2 appartenant respectivement aux solides S_1 et S_2 , il faut imaginer les solides à l'instant $t + \Delta t$. Ils ont tourné autour de leurs centres respectifs. Quand à l'instant t tous les points sont confondus, ils apparaissent distincts à l'instant $t + \Delta t$ (figure 16). Le point P toujours en contact est appelé **point coïncident au contact**.

Le torseur cinématique du mouvement de S_1/S_2 en P s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{V}_{S_2/S_1} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \\ \overrightarrow{V}_{P,2/1} \end{array} \right\}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1}^n + \overrightarrow{\Omega}_{2/1}^t \\ \overrightarrow{V}_{P,2/1} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$



- Le vecteur $\overrightarrow{V}_{P,2/1}$ est appelé vecteur vitesse de glissement de S_2/S_1 . Il est dans le plan tangent commun Π et est dirigé suivant la direction privilégiée du glissement. Il n'a pas de composante selon le vecteur normal au contact \overrightarrow{n} car les solides ne peuvent pas s'interpénétrer.
- Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}^n$ est appelé vecteur rotation de pivotement ; il est porté par la normale au contact.
- Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}^t$ est appelé vecteur rotation de roulement ; il est porté par une direction du plan tangent commun.

Remarque 4.4 (Cas du roulement sans glissement)

Il est souvent utile dans les applications d'utiliser un cas particulier du contact ponctuel pour lequel les solides en contact roulent l'un par rapport à l'autre sans glisser. Un exemple typique de ce cas est donné par une roue qui roule sur la route sans glisser. Les composantes du torseur cinématique de la liaison se simplifient alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{P,2/1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Omega_{2/1}^n} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Omega_{2/1}^t} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Un tel contact est appelé **roulement sans glissement** (ni pivotement).

5 Composition des mouvements

Les applications de sciences de l'ingénieur font toujours apparaître plusieurs classes d'équivalence dans la partie mécanique d'un système. Dans ce cadre il est très souvent utile de regarder le mouvement d'un solide dans différents référentiels. On cherche donc à définir des lois de composition de mouvements. Ces lois nous serviront à déterminer des lois entrées-sorties, en écrivant des fermetures cinématiques, ou à trouver des liaisons équivalentes quand celles-ci seront en série.

5.1 Composition des vecteurs rotations

Quand plusieurs solides sont en mouvement les uns par rapport aux autres, les vecteurs rotations sont liés par le théorème suivant :

Théorème 5.1

La composition des vecteurs rotation s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{n-1}}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_{n-1}/\mathcal{R}_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

Démonstration. Afin de démontrer cette composition des vecteurs rotations, on considère, sans perte de généralité, trois solides auxquels on associe trois référentiels :

- un solide S de référentiel associé \mathcal{R} ;
- un solide S_1 de référentiel associé \mathcal{R}_1 ;
- un solide S_2 de référentiel associé \mathcal{R}_2 .

Soit \vec{U} un vecteur quelconque en mouvement par rapport aux différents repères. On peut

alors calculer les vecteurs dérivés :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_2} &= \frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}} \wedge \vec{U} \\ \frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_1} &= \frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \vec{U}\end{aligned}$$

Des deux équations précédentes, on déduit alors la relation suivante par substitution :

$$\frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_2} = \frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + \left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}\right) \wedge \vec{U}$$

Cette dernière est à comparer avec la définition de la dérivée du vecteur \vec{U} dans le repère \mathcal{R}_2 en passant par le repère \mathcal{R} :

$$\frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_2} = \frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} \wedge \vec{U}$$

Ce qui prouve finalement que :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}}$$

□

5.2 Composition des vecteurs vitesses

De la même manière que précédemment, on cherche ici à mettre en évidence une relation entre $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$, $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$ et $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}}$. Pour étudier le mouvement du point $A \in \mathcal{R}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_1 , il est toujours possible d'utiliser une composition de la forme :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

faisant intervenir le référentiel \mathcal{R}_2 associé à un solide \mathcal{S}_2 . On appelle alors :

- vitesse absolue du point A dans le référentiel \mathcal{R}_1 le vecteur $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$;
- vitesse relative du point A dans le référentiel \mathcal{R}_2 le vecteur $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$;
- vitesse d'entraînement du point A du solide \mathcal{S}_2 dans son mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R}_1 le vecteur $\overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$ où le « $A \in \mathcal{R}_2$ » signifie que l'on a « attaché le point A au solide \mathcal{S}_2 ».

Remarque 5.1 (Calcul des vitesses d'entraînement)

Contrairement aux vitesses absolues ou relatives d'un point dans un référentiel, la vitesse d'entraînement d'un point d'un solide dans un référentiel ne peut pas être calculée par dérivation sans faire d'hypothèse et doit donc être calculée à partir du champ de vitesses (torseur).

Théorème 5.2

De manière générale, on pourra toujours écrire :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_{n-1}}} + \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}_{n-1}/\mathcal{R}_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

Démonstration. La démonstration se basera, comme pour les vecteurs rotations, sur trois solides en mouvement les uns par rapport aux autres. On part de la définition du vecteur vitesse du point A lié au solide \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} &= \left. \frac{d\overrightarrow{O_1\dot{A}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \left. \frac{d(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2\dot{A}})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \left. \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\overrightarrow{O_2\dot{A}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{O_2\dot{A}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \\ &= \left. \frac{d\overrightarrow{O_2\dot{A}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \underbrace{\overrightarrow{V_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + \overrightarrow{O_2\dot{A}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}}_{\overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}} \\ \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} &= \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \end{aligned}$$

Dans le dernier terme de cette équation, on met en exergue le fait que A est pris fixe dans \mathcal{R}_2 alors que « naturellement » il appartient au solide \mathcal{S} . Dans le cas des trois solides en mouvement, les vitesses intervenant dans la composition des vitesses portent un nom :

- $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$ est la vitesse absolue du point A dans le référentiel \mathcal{R}_1 ;
- $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$ est la vitesse relative du point A dans le référentiel \mathcal{R}_2 ;
- $\overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$ est la vitesse d'entraînement du point A fixe dans \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 .

□

5.3 Composition des torseurs cinématiques

Les deux équations des théorèmes 5.1 et 5.2 nous permettent d'en déduire une loi de composition générale.

Théorème 5.3

La loi de composition des mouvements de solides s'écrit dans le cas général :

$$\{\mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_1}\} = \{\mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_n}\} + \{\mathcal{V}_{\mathcal{R}_n/\mathcal{R}_{n-1}}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}\}$$

5.4 Composition des accélérations

Par définition l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$ est la variation du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$ par unité de temps. On écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1}$$

Remarque 5.2

Attention, le champ d'accélération d'un solide \mathcal{S} n'est pas un champ de torseur. Il n'existe pas d'équation permettant de passer de l'accélération d'un point A à l'accélération d'un point B directement. Pour cela, on repassera toujours par la vitesse des points et la définition de l'accélération.

Il est néanmoins possible de composer les accélérations par rapport à plusieurs repères. Les expressions restent simples tant que l'on reste dans le cadre de trois solides en mouvements relatifs. Cela restreindra le cadre de la démonstration.

Théorème 5.4

Si trois solides de repères \mathcal{R} , \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont en mouvements relatifs, alors l'expression de l'accélération du point A , fixe dans le repère \mathcal{R} , par rapport au repère \mathcal{R}_1 peut être décomposée selon :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}$$

avec :

- $\overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}$ l'accélération absolue du point A dans le référentiel \mathcal{R}_1 ;
- $\overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}$ l'accélération relative du point A dans le référentiel \mathcal{R}_2 ;
- $\overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ l'accélération d'entraînement du point A considéré comme fixe dans \mathcal{R}_2 par rapport au référentiel \mathcal{R}_1 ;
- $2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}$ l'accélération de Coriolis.

Démonstration. Pour démontrer la composition des accélérations, on repart de la composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{V}_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$$

On dérive par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R}_1 , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} &= \left. \frac{d\overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\overrightarrow{V}_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \left. \frac{d\overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \left. \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V}_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} \right] \right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \left. \frac{d\overrightarrow{V}_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} \right)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Gamma}_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} \\
&\quad + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O_2\dot{A}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Gamma}_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} \\
&\quad + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\left. \frac{d\overrightarrow{O_2\dot{A}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} \right) \\
&= \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Gamma}_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2\dot{A}} \right) \\
&\quad + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Gamma}_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{V}_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}
\end{aligned}$$

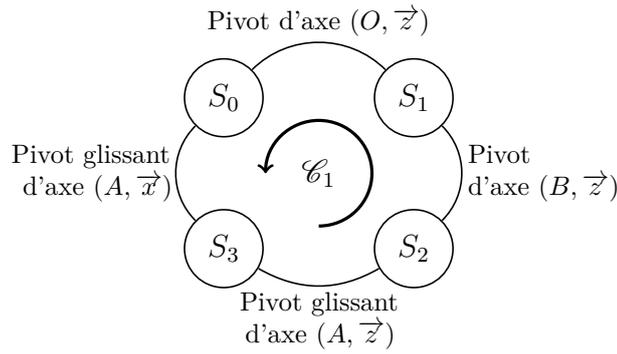
□

5.5 Application de la composition des mouvements : fermeture cinématique

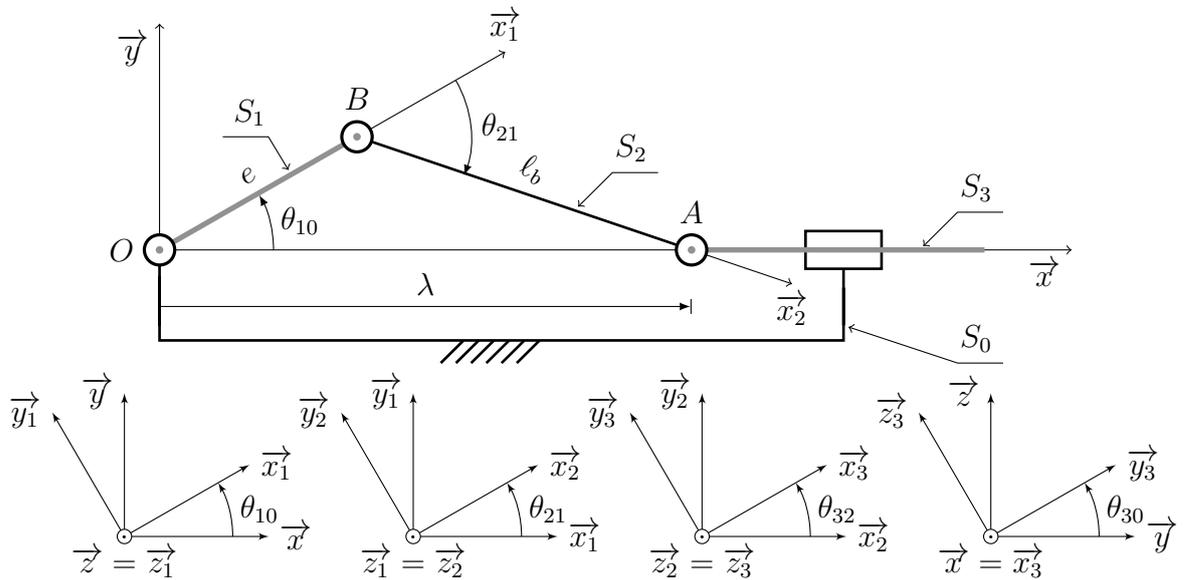
Dans cette partie on aborde, au travers d'un exemple, un cas d'utilisation très courant de la composition des mouvements : l'écriture de la fermeture cinématique. Ces fermetures permettent de déterminer les lois entrées-sorties des mécanismes. Contrairement à celles déterminées par la fermeture géométrique, ces lois vont porter sur les grandeurs cinématiques que sont les vitesses de rotation et les vitesses de translation. En règle générale, on peut écrire autant de fermetures cinématiques que le nombre cyclomatique du graphe de liaisons du mécanisme.

Exemple 5.1 (Moteur thermique d'aéromodélisme)

On reprend à titre d'exemple le mécanisme « bielle-manivelle » du moteur d'aéromodélisme.



Le graphe des liaisons du mécanisme fait apparaître un seul cycle (\mathcal{C}_1). Il est donc possible d'écrire une seule fermeture cinématique portant sur les torseurs cinématiques conduisant à deux équations vectorielles. On rappelle ci-dessous le schéma cinématique du système et les figures géométrales de paramétrage.



La fermeture cinématique s'écrit simplement par une composition des mouvements en passant par chaque liaison du cycle du graphe de liaisons. On peut écrire par exemple :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} + \{\mathcal{V}_{0/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{0\} \quad (1)$$

Il ne reste plus qu'à exprimer chaque torseur des liaisons :

- Liaison 1/0 : liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) : $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_{10} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$
- Liaison 2/1 : liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}_{21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
- Liaison 3/2 : liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) : $\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta}_{32} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

— Liaison 3/0 : liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{x}) : $\{\mathcal{V}_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_{30} \vec{x} \\ \dot{\lambda} \vec{x} \end{array} \right\}$

Pour faire la somme algébrique de ces torseurs, il faut écrire (réduire) tous les torseurs au même point. On choisit le point B (seul point pour lequel la composition des vitesses ne fera pas intervenir $\dot{\theta}_{21}$). Changer de point un torseur nécessite l'utilisation de la relation de changement de point ou équation de Varignon (propriété de champ de vitesse) donnée par le théorème 4.2.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_{1/0}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_{10} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{10} \vec{z} \\ e \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \end{array} \right\} \\ \text{car } \overrightarrow{V}_{B,1/0} &= \underbrace{\overrightarrow{V}_{O,1/0}}_{\vec{0}} + \dot{\theta}_{10} \vec{z} \wedge \overrightarrow{OB} = e \dot{\theta}_{10} \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = e \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \\ \{\mathcal{V}_{3/2}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta}_{32} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{32} \vec{z} \\ -\ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 \end{array} \right\} \\ \text{car } \overrightarrow{V}_{B,3/2} &= \underbrace{\overrightarrow{V}_{A,3/2}}_{\vec{0}} + \dot{\theta}_{32} \vec{z} \wedge \overrightarrow{AB} = -\ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{z} \wedge \vec{x}_2 = -\ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 \\ \{\mathcal{V}_{3/0}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_{30} \vec{z} \\ \dot{\lambda} \vec{x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{30} \vec{z} \\ \dot{\lambda} \vec{x} - \ell_b \dot{\theta}_{30} \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \vec{z} \end{array} \right\} \\ \text{car } \overrightarrow{V}_{B,3/0} &= \underbrace{\overrightarrow{V}_{A,3/0}}_{\dot{\lambda} \vec{x}} + \dot{\theta}_{30} \vec{x} \wedge \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{-\ell_b \vec{x}_2} = \dot{\lambda} \vec{x} - \ell_b \dot{\theta}_{30} \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \vec{z} \end{aligned}$$

La fermeture cinématique, équation 1, est donc équivalente à deux équations vectorielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{10} \vec{z} - \dot{\theta}_{30} \vec{x} + \dot{\theta}_{32} \vec{z} + \dot{\theta}_{21} \vec{z} = \vec{0} \\ e \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 - \dot{\lambda} \vec{x} + \ell_b \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \dot{\theta}_{30} \vec{z} - \ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 = \vec{0} \end{array} \right. \quad (2)$$

La loi entrée-sortie doit être une relation liant $\dot{\theta}_{10}$ et $\dot{\lambda}$. On élimine $\dot{\theta}_{32}$ et $\dot{\theta}_{30}$ en projetant l'équation 2 sur un vecteur orthogonal à \vec{y}_2 et \vec{z} , donc \vec{x}_2 . Il vient alors :

$$e \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{21} - \dot{\lambda} \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0$$

Vous pouvez vous « amuser » à démontrer que cette équation est une combinaison linéaire des dérivées des équations obtenues grâce à la fermeture géométrique.

► ► ► Pour aller plus loin...

Le problème avec une approche géométrique est que l'on trouve presque toujours, une équation non linéaire à résoudre. Dans une approche cinématique les inconnues sont les vitesses, par exemple ici $\dot{\theta}_{10}$ et $\dot{\lambda}$. Or à chaque instant t , si on connaît la configuration géométrique (définie dans notre exemple par e , θ_{10} et θ_{21}), alors le système à résoudre est

linéaire. Cette propriété de linéarité est primordiale en vue d'une résolution numérique du problème. Dans notre exemple la sortie est définie par une équation de la forme $\dot{\lambda} = a\dot{\theta}_{10}$ avec $a = \frac{e \sin \theta_{21}}{\cos(\theta_{21} + \theta_{10})}$. Il ne reste plus qu'à mettre à jour les valeurs des angles à l'instant $t + \Delta t$ par une équation de la forme $\theta_{10}(t + \Delta t) = \theta_{10}(t) + \dot{\theta}_{10} \Delta t$ pour recommencer la résolution du système linéaire à l'instant $t + \Delta t$.

6 Mouvements plans sur plans

6.1 Définition

Définition 6.1 (Mouvement plan)

Un solide est en mouvement plan dans un référentiel si tous ses points se déplacent dans des plans parallèles à un plan fixe de ce référentiel.

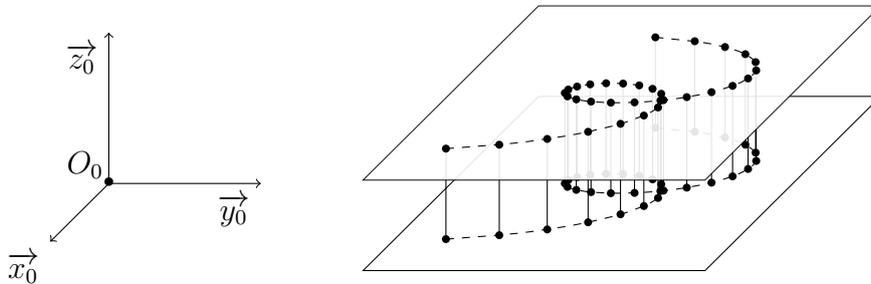


FIGURE 17 – Mouvement plan d'un solide \mathcal{S} par rapport à un référentiel \mathcal{R}_0 .

Dans le cas d'un mouvement plan, deux paramètres linéaires suffisent à décrire les variations de positions de l'origine et un seul paramètre angulaire suffit à orienter la base mobile associés à un solide par rapport à un référentiel (figure 18). Un solide en mouvement plan par rapport à un référentiel possède donc au maximum trois degrés de liberté.

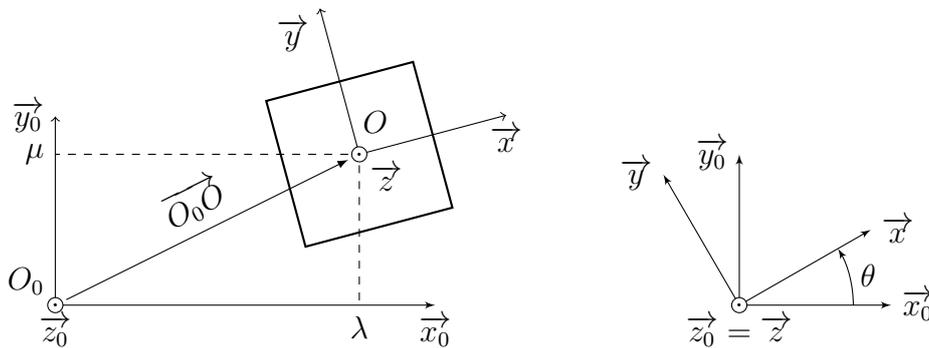


FIGURE 18 – Paramétrage du mouvement plan d'un solide \mathcal{S} dans un référentiel \mathcal{R}_0 .

Si, comme illustré par la figure 18, le mouvement des points d'un solide \mathcal{S} se fait dans des plans parallèles de normale \vec{z}_0 , la position du repère associé à \mathcal{S} sera complètement

définie par le vecteur position $\overrightarrow{O_0\dot{O}} = \lambda(t) \vec{x}_0 + \mu(t) \vec{y}_0 + \rho \vec{z}_0$ avec ρ une constante telle que la vitesse du point O s'écrive :

$$\overrightarrow{V_{O,S/\mathcal{R}_0}} = \dot{\lambda}(t) \vec{x}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{y}_0$$

et vérifie :

$$\overrightarrow{V_{O,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

L'orientation de la base associée à \mathcal{S} sera, quant à elle, complètement définie avec un seul angle θ autour de l'axe \vec{z}_0 , tel que le vecteur rotation s'écrive $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \dot{\theta} \vec{z}$. En exploitant la formule de changement de point, il vient :

$$\overrightarrow{V_{O,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \vec{z}_0 = \left(\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MO} \right) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

de sorte que la vitesse de chaque point M du solide \mathcal{S} vérifie :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Remarque 6.1

Dans le cas particulier des mouvements plans, les torseurs cinématiques des liaisons (table 3) peuvent être simplifiés afin de respecter la forme des vecteurs vitesse et rotation.

6.2 Méthode utilisant l'équiprojectivité

Dans la section 4.5, on a introduit et démontré l'équiprojectivité du champ de vitesses d'un solide \mathcal{S} en mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_0 (théorème 4.3, page 28), qui s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Dans le cas particulier des mouvements plan sur plan, cette relation est à la base d'une méthode de résolution graphique dans la recherche de la vitesse d'un point d'un solide \mathcal{S} .

Méthode graphique exploitant l'équiprojectivité

Soient M et N deux points d'un solide \mathcal{S} en mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 . On suppose connues la vitesse $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$ du point M ainsi que la direction (support) de la vitesse $\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}}$ du point N . Pour déterminer complètement le vecteur vitesse au point N il est nécessaire de :

1. tracer la projection du vecteur $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$ selon la droite (MN) pour obtenir la longueur correspondant à $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$;
2. reporter, dans le même sens, cette longueur au point N pour qu'elle corresponde à $\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$;
3. reconstruire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}}$ en traçant une droite perpendiculaire à (MN) passant par l'extrémité de la projection et coupant le support connu de $\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}}$.

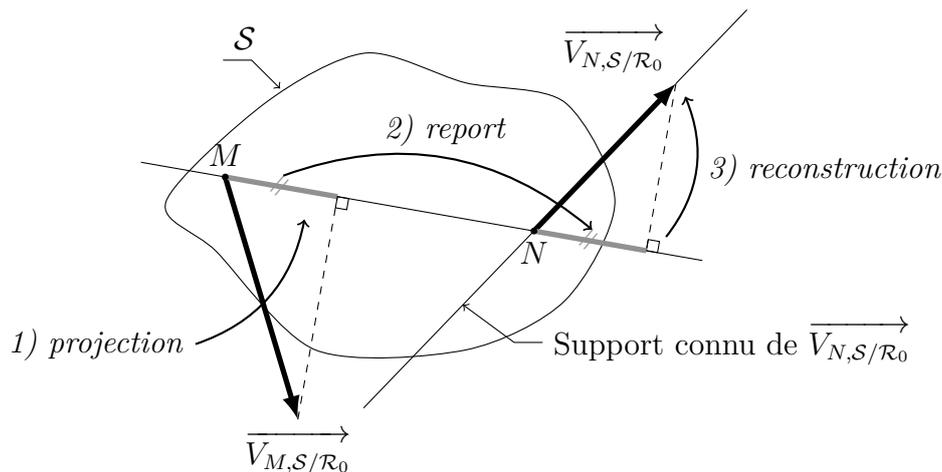


FIGURE 19 – Méthode graphique en trois étapes utilisant la propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide.

6.3 Centre instantané de rotation (CIR)

Dans le cas de mouvements plan sur plan, l'intersection de l'axe central d'un torseur cinématique avec un plan de référence du mouvement correspond à un point I appelé **centre instantané de rotation** et souvent abrégé CIR. La vitesse d'un solide \mathcal{S} en ce point est nulle :

$$\overrightarrow{V_{I,S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

Pour un mouvement quelconque, la position du CIR d'un solide change au cours du temps. La trajectoire du CIR dans le référentiel d'étude du mouvement est appelée *la base* et celle dans le repère associé au solide *la roulante*. Ces deux courbes, tangentes au niveau du CIR, roulent sans glisser l'une sur l'autre.

À chaque instant t donné, le champ des vitesses d'un solide possède toutes les propriétés de celui d'un solide en rotation plane autour de son CIR. À partir de la propriété de vitesse nulle du CIR, ici noté I , on peut écrire la vitesse d'un point M quelconque d'un solide \mathcal{S} comme :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{IM}$$

Or comme pour un problème de mouvements plan sur plan, $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ et \overrightarrow{IM} sont perpendiculaires, on a les propriétés suivantes :

- le support (direction) du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$ est perpendiculaire à la droite (IM) ;
- le sens du vecteur vitesse est imposé par $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ tel que $(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}, \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}})$ soit un trièdre direct ;
- la norme de la vitesse du point M dans le repère \mathcal{R}_0 est proportionnelle à sa distance avec le CIR car :

$$\|\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}\| = \|\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\| \times \|\overrightarrow{IM}\|$$

On présente ci-après une autre méthode de résolution graphique à la recherche de la vitesse d'un point d'un solide en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 .

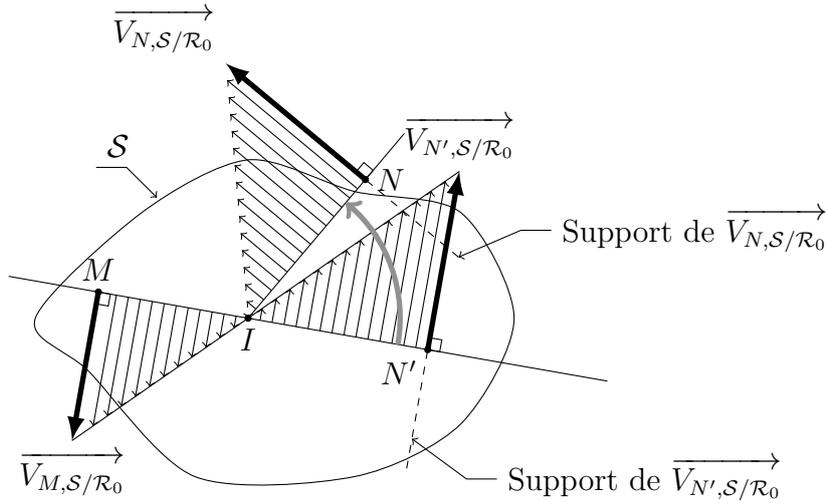


FIGURE 20 – Méthode graphique utilisant le centre instantané de rotation d'un solide.

Méthode graphique exploitant le CIR

Soient M et N deux points d'un solide \mathcal{S} en mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 . On suppose connus la vitesse $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$ du point M ainsi que le centre instantané de rotation du solide I . Pour déterminer complètement le vecteur vitesse au point N il est nécessaire de :

1. construire un point N' , par rotation autour du point I et tel que les points M , I et N' soient alignés ;
2. tracer le support (direction) de la vitesse $\overrightarrow{V_{N',S/\mathcal{R}_0}}$ du point N' ;
3. tracer la droite entre I et l'extrémité de la vitesse connue, ici $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$: l'intersection avec le support de $\overrightarrow{V_{N',S/\mathcal{R}_0}}$ permet de trouver la norme de la vitesse au point N' ;
4. reporter la norme de $\overrightarrow{V_{N',S/\mathcal{R}_0}}$ sur le support de $\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}}$, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à la droite (IN) en N .

Théorème 6.1 (Trois CIR)

Si un solide S_1 roule sans glisser sur un solide S_2 , qui lui-même roule sans glisser sur un solide S_3 , roulant sans glisser sur le solide S_1 (le roulement ne se faisant pas nécessairement sur des surfaces réelles), alors les CIR I_{21} , I_{32} et I_{31} sont alignés et I_{31} est le barycentre des points I_{32} et I_{21} respectivement affectés des poids $\omega_{3/2}$ et $\omega_{2/1}$.

Démonstration. Par définition, la vitesse en un CIR est nulle ; ce qui se traduit pour les trois CIR étudiés par :

$$\overrightarrow{V_{I_{21},2/1}} = \overrightarrow{V_{I_{32},3/2}} = \overrightarrow{V_{I_{31},3/1}} = \vec{0}$$

Or, en utilisant la composition des vitesses au point I_{31}

$$\overrightarrow{V_{I_{31},3/1}} = \overrightarrow{V_{I_{31},3/2}} + \overrightarrow{V_{I_{31},2/1}} = \vec{0}$$

et les relations de changement de point

$$\overrightarrow{V}_{I_{31},3/2} = \underbrace{\overrightarrow{V}_{I_{32},3/2}}_{\vec{0}} + \omega_{3/2} \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{31}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V}_{I_{31},2/1} = \underbrace{\overrightarrow{V}_{I_{21},2/1}}_{\vec{0}} + \omega_{2/1} \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{I_{21}I_{31}}$$

on obtient :

$$\vec{z}_0 \wedge (\omega_{3/2} \overrightarrow{I_{32}I_{31}} + \omega_{2/1} \overrightarrow{I_{21}I_{31}}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{3/2} \overrightarrow{I_{32}I_{31}} + \omega_{2/1} \overrightarrow{I_{21}I_{31}} = \vec{0}$$

qui peut se récrire :

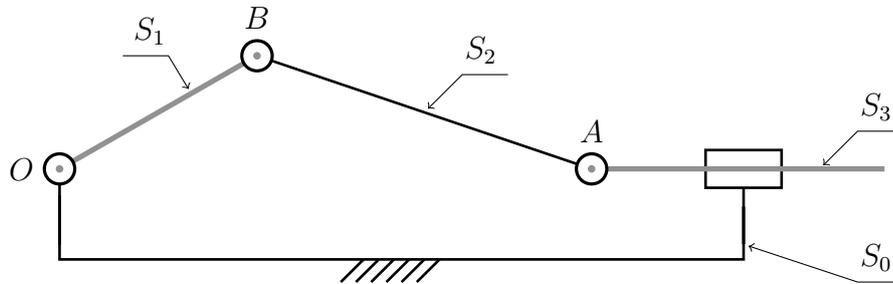
$$\overrightarrow{I_{31}I_{32}} = -\frac{\omega_{2/1}}{\omega_{3/2}} \overrightarrow{I_{31}I_{21}}$$

et qui implique que les trois CIR I_{21} , I_{32} et I_{31} soient alignés et que I_{31} soit le barycentre des points I_{32} et I_{21} respectivement affectés des poids $\omega_{3/2}$ et $\omega_{2/1}$. \square

6.4 Exemple de résolution graphique

Exemple 6.1 (Moteur thermique d'aéromodélisme)

Nous reprenons l'exemple du micromoteur en nous focalisant cette fois sur le dimensionnement de la liaison pivot glissant entre le piston et le carter. La réalisation technique exige que l'interface entre le piston et le carter puisse résister à l'échauffement induit par le frottement. Or, dans des conditions normales de lubrification, on peut montrer que l'échauffement est proportionnel à la vitesse de translation. On cherche donc, à partir de la vitesse maximale de rotation du moteur souhaité la vitesse de translation du piston correspondante en fonction de la configuration instantanée.



On se propose de résoudre ce problème, c'est-à-dire déterminer la norme de la vitesse $\overrightarrow{V}_{A,3/0}$ dans la configuration tracée ci-dessus connaissant $\dot{\theta}_{10} = \omega_{10}$. On pourra utiliser deux méthodes :

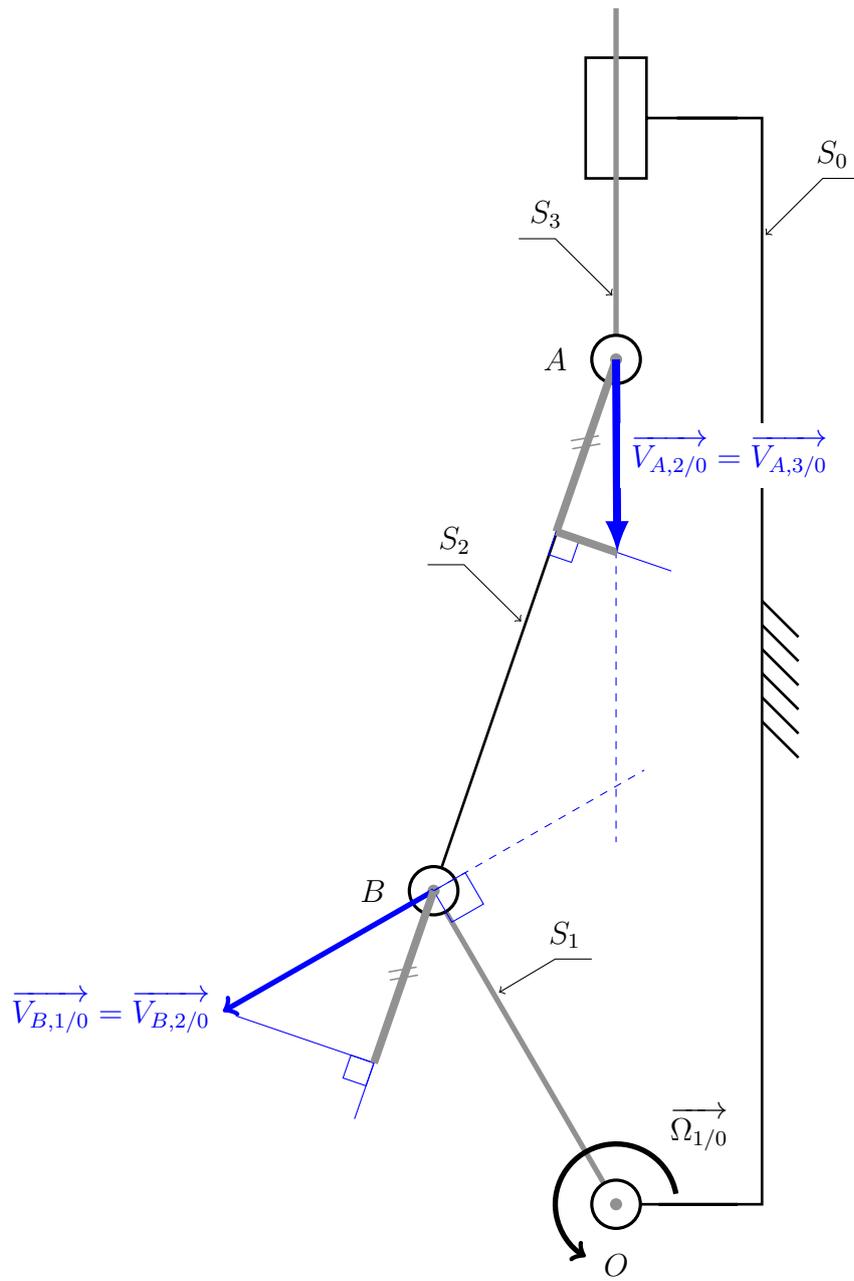
1. une méthode utilisant l'équiprojectivité ;
2. une méthode utilisant le CIR.

Méthode utilisant l'équiprojectivité :

1. tracer le support de la vitesse $\overrightarrow{V_{A,3/0}}$ selon l'axe de la liaison pivot glissant entre S_3 et S_0 ;
2. tracer la vitesse $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ suivant la perpendiculaire en B à la droite (OB) sachant que O est le CIR de 1/0 sachant que $||\overrightarrow{V_{B,1/0}}|| = |\omega_{1/0}| \cdot ||\overrightarrow{OB}||$;
3. identifier cette vitesse à $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ sachant que B est le CIR de 2/1 et donc que $\overrightarrow{V_{B,2/1}} = \overrightarrow{0}$;
4. utiliser la propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses de la bielle (S_2) dans son mouvement par rapport au carter (S_0) entre les points B et A , soit :

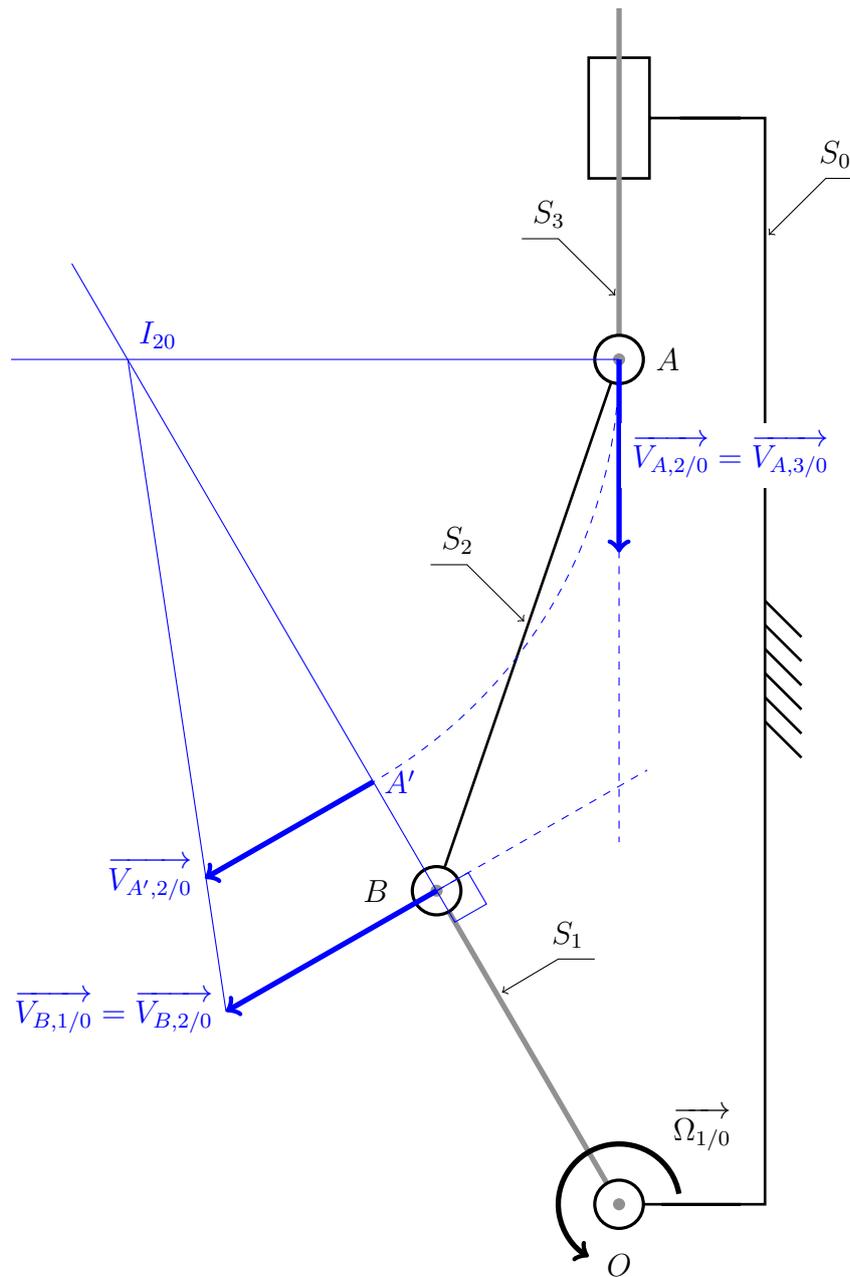
$$\overrightarrow{V_{B,2/0}} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{V_{A,2/0}} \cdot \overrightarrow{BA}$$

5. identifier la vitesse $\overrightarrow{V_{A,2/0}}$ à la vitesse recherchée $\overrightarrow{V_{A,3/0}}$ sachant que A est le CIR de 2/3 et donc que $\overrightarrow{V_{A,2/3}} = \overrightarrow{0}$, puis reconstruire la vitesse $\overrightarrow{V_{A,2/0}}$ sur son support en veillant bien à obtenir une longueur image de la vitesse plus grande que sa projection suivant (BA) .



Méthode utilisant le CIR :

1. tracer le support de la vitesse $\overrightarrow{V_{A,3/0}}$ selon l'axe de la liaison pivot glissant entre S_3 et S_0 ;
2. tracer la vitesse $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ suivant la perpendiculaire en B à la droite (OB) sachant que O est le CIR de 1/0 sachant que $\|\overrightarrow{V_{B,1/0}}\| = |\omega_{1/0}| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|$;
3. identifier cette vitesse à $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ sachant que B est le CIR de 2/1 et donc que $\overrightarrow{V_{B,2/1}} = \vec{0}$;
4. trouver et tracer le CIR du mouvement de 2/0 :
 - soit par l'intersection des perpendiculaires aux directions des vecteurs vitesse en A et B ;
 - soit en utilisant le théorème des trois CIR;
5. construire le point A' à la même distance que A de I_{20} sur la droite $(I_{20}B)$;
6. déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{A',2/0}}$ sachant que I_{20} est le CIR de 2/0 (triangle des vitesses);
7. tracer $\overrightarrow{V_{A,2/0}}$ sachant que $\|\overrightarrow{V_{A,2/0}}\| = \|\overrightarrow{V_{A',2/0}}\|$;
8. identifier la vitesse $\overrightarrow{V_{A,2/0}}$ à la vitesse recherchée $\overrightarrow{V_{A,3/0}}$ sachant que A est le CIR de 2/3 et donc que $\overrightarrow{V_{A,2/3}} = \vec{0}$.



► ► ► *Pour aller plus loin...*

La configuration du dessin est-elle la plus adaptée pour trouver la vitesse de translation maximale du piston par rapport au corps ?

* *
*